Berücksichtigung der Quantenelektrodynamik bei Elektron - Nukleon - Prozessen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Werner Sandhas

aus Berlin

1963

Berücksichtigung der Quantenelektrodynamik bei Elektron - Nukleon - Prozessen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Werner Sandhas

aus Berlin

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Gutachter : Prof. Dr. G. LUDWIG , Prof. Dr. G. GRAWERT

Tag der mündlichen Prüfung : 20. Februar 1963 .

Tag der Promotion: 24. Juli 1963

INHALTSVERZEICHNIS :

EINLEITUNG 1

Vorbemerkungen 3

ELEKTROPROZESSE 6

ELEKTRON-NUKLEON-STREUUNG 9

Vergleich mit der Störungsrechnung 11

Zwischenzustände in der LOWgleichung für

$\langle q' \lambda' ; p' \sigma' \mid T_2 \mid p \sigma ; q \lambda \rangle$ 13

Näherungsbehandlung von $\langle q' \lambda' ; p' \sigma' \mid T_2 \mid p \sigma ; q \lambda \rangle$ 18

Höhere Zwischenzustände 22

KONSEQUENTE FORMULIERUNG DES NÄHERUNGSVERFAHRENS 24

Mehrelektronen - und Photonen - Zwischenzustände 26

Matrixelemente der Einphoton-Prozesse 30

Dispersionsrelation für $\langle q' \lambda' ; p' \sigma' \mid T_2 \mid p \sigma ; q \lambda \rangle$ 32

NEGATRON - POSITRON - PAARERZEUGUNG 38

Niederenergietheorem 45

Dispersionsrelation 50

ZUSAMMENFASSUNG 54

LITERATURVERZEICHNIS 56

EINLEITUNG

In verschiedenen Arbeiten (vgl. z.B. [1] und [2]) wurde der Einfluß der Polarisierbarkeit des Nukleons durch Zwei-Photonen-Austausch abgeschätzt . So wurde von DRELL und FUBINI [2] für die Elektron-Proton-Streuung unter Verwendung eines , mit Hilfe der statischen Theorie abgeleiteten Ausdruckes für den COMPTONeffekt,modellmäßig eine Korrektur von etwa 1% zu dem mit der ROSENBLUTHformel bestimmten Wirkungsquerschnitt für große Winkel berechnet . Grundsätzlich wurde in diesem Modell das gesamte Problem vom Standpunkt der Störungstheorie aus behandelt und in den erhaltenen störungsthecretischen Ausdrücken das Matrixelement des virtuellen COMPTONeffektes (abgesehen von zusätzlich angebrachten Formfaktoren) durch den unabhängig hiervon , aus der statischen Theorie berechneten Ausdruck für den COMPTONeffekt [3] ersetzt . Ebenfalls störungstheoretische Überlegungen führten in der Arbeit von BJORKEN , DRELL und FRAUTSCHI [4] über Negatron-Positron-Paarerzeugung in dem die direkte Wechselwirkung des realen Photons mit dem Proton enthaltenden Ausdruck , nach Einsetzen der statischen Formfaktorwerte für die Photon-Proton-Vertices , zu Abschätzungen des Beitrages dieses Anteils zum Gesamtprozeß .

Vom Standpunkt der prinzipiellen Frage nach der Wechselwirkung von Elektronen mit einem System stark wechselwirkender Teilchen über virtuelle Photonen aus erscheint es wünschenswert , zu untersuchen , wie in einer "axiomatischen" , d.h. zunächst hinsichtlich der Wechselwirkung nicht näher spezifizierten Feldtheorie , nach Einsetzen der speziellen Forderungen der Quantenelektrodynamik für das Elektron-Photon-Feld , diese zusätzlichen Bedingungen so berücksichtigt werden können , daß als unbekannte Ausdrücke nur noch Matrixelemente auftreten , die die nicht näher spezifizierten Größen der Pion-Nukleon-Wechselwirkung enthalten , also Ausdrücke , die im Prinzip durch eine Theorie dieser stark wechselwirkenden Teilchen zu berechnen wären .

Ansätze zur Lösung dieses Problems finden sich in der bereits zitierten Arbeit von DRELL und FUBINI [2]. Sie beruhen im wesentlichen auf einer Entwicklung des Elektronenfeldes nach Potenzen der elektrischen Ladung e und Berücksichtigung nur der niedrigsten Ordnung im Korrekturterm zu dem, nur den Formfaktor enthaltenden Ein-Photon-Austauschterm. Der erhaltene Ausdruck wurde jedoch von DRELL und FUBINI nicht weiter behandelt.

Hier soll ein anderes Verfahren entwickelt werden, das im Prinzip eine vollständige sukzessive Abspaltung der Quantenelektrodynamik des Elektron-Photonfeldes von dem System der stark wechselwirkenden Nukleonen und Pionen gestattet, die allein noch in Matrixelementen der Wechselwirkung eines virtuellen Photons mit diesen Teilchen enthalten sind.

Vorbemerkungen

Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist der übliche Formalismus der axiomatischen Feldtheorie in der L-S-Z-Formulierung [6]. Insbesondere sei der hier betrachtete HILBERTraum der Elektronen, Nukleonen, Photonen und Pionen (vom Auftreten weiterer Teilchen wird im folgenden abgesehen) aufgebaut aus Zuständen

$$|q_1 s_1, \cdots; q_n s_n; p_1 \sigma_1, \cdots p_m \sigma_m; k_1 \epsilon_1, \cdots k_\ell \epsilon_\ell; \cdots; \pi_1; \cdots \pi_r\rangle^{in}_{out}$$

mit den Viererimpulsen q_i, p_i, k_i, π_i der Elektronen, Nukleonen, Photonen und Pionen.

Im folgenden untersuchen wir sogenannte Elektroprozesse (virtuelle Photoprozesse) am Nukleon, d.h. Prozesse, bei denen neben einem Nukleon im Anfangs- und Endzustand noch jeweils ein Elektron im Anfangs- und wenigstens ein Elektron im Endzustand beteiligt ist. Ferner können im Endzustand weitere Photonen, Elektronen, Pionen und eventuell Nukleon- Antinukleon-Paare auftreten. Der Anfangszustand sei also charakterisiert durch $|p\sigma; q s\rangle^{in}$, der Endzustand durch $|q' s'; p' \sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \ldots\rangle^{out}$. Die Einschränkung auf einen Elektron- Nukleon- Anfangszustand ist hierbei nicht wesentlich, sie wird später auch aufgehoben (vergl. die Behandlung der Negatron- Positron-Paarerzeugung), wurde hier aber zunächst eingeführt, da die folgenden Überlegungen dadurch übersichtlicher werden. Im übrigen lassen sich alle hier erhaltenen Ergebnisse mit Hilfe des Crossing-Symmetrie sofort auf den allgemeineren Fall übertragen.

Mit der üblichen Definition der S-Matrix durch

$$\langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \ldots | S | p\sigma; qs\rangle = {}^{out}\langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \ldots | p\sigma; qs\rangle^{in} \quad (1)$$

ergeben sich mit $S = 1 + iT$ nach Reduktion (vergl. [6]) hinsichtlich der beiden Elektronen des Anfangs- und des Endzustandes als mögliche Reduktionsformeln

$$\langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \ldots | T | p\sigma; qs\rangle =$$

$$= -\int d^4x \int d^4y\ \delta(x^0 - y^0)\ {}^{out}\langle p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \ldots | \bar{u}_{s'}(q')\, \varphi^*_{q'}(x)\, [\sigma_\varepsilon(x), \psi^+_\varepsilon(y)]_\mp u_s(q)\, \varphi_q(y) | p\sigma\rangle \quad (2)$$

$$+ i \int d^4x \int d^4y\ \Theta(x^0 - y^0)\ {}^{out}\langle p'\sigma', k_i, q_i, \pi_i, \ldots | \bar{u}_{s'}(q')\, \varphi_{q'}(x)\, [\sigma_\varepsilon(x), \bar{\sigma}_\varepsilon(y)]_\mp u_s(q)\, \varphi_q(y) | p\sigma\rangle$$

mit dem retardierten (Anti-) Kommutator $\Theta(x^0-y^0)\,[\sigma_e(x),\bar{\sigma}_e(y)]_{\mp}$

bzw. $\langle q's';\, p'\sigma';\, k_i,\, q_i,\pi_i \cdots \mid T \mid p\sigma;\, qs\rangle =$

$$= -\int d^4x \int d^4y\; \delta(x^0-y^0)\; {}^{out}\!\langle p'\sigma';\, k_i,\, q_i,\, \pi_i \cdots \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x)\, [\sigma_e(x),\, \psi_e^+(y)]_{\mp}\, u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle \qquad (3)$$

$$+ i\int d^4x \int d^4y\; {}^{out}\!\langle p'\sigma';\, k_i,\, q_i,\, \pi_i, \cdots \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x)\, T_{(\mp)}\,(\sigma_e(x)\,\bar{\sigma}_e(y))\, u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle$$

mit dem zeitgeordneten Produkt

$$T_{(\mp)}\,(\sigma_e(x)\,\bar{\sigma}_e(y)) = \Theta(x^0-y^0)\;\sigma_e(x)\,\bar{\sigma}_e(y) \mp \Theta(y^0-x^0)\;\bar{\sigma}_e(y)\,\sigma_e(x)\;;$$

hierbei ist $f_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{iqx}$

$$\sigma_e(x) = \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_e\right)\psi_e(x) \qquad \text{und} \qquad \bar{\sigma}_e(x) = \sigma_e^+(x)\,\gamma^0 = \bar{\psi}_e(x)\left(-i\gamma^\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} - m_e\right) \qquad (4)$$

Für den im folgenden durchgeführten Vergleich mit der Quantenelektrodynamik ist die Reduktionsformel (3), mit dem zeitgeordneten Produkt, günstiger als (2), wir gehen daher im weiteren von ihr aus. Insbesondere folgt aus (3) sofort (vgl. [7], Seite 329) der Ausdruck (LOWgleichung [8])

$$\langle q's';\, p'\sigma';\, k_i, q_i,\, \pi_i, \cdots \mid T \mid p\sigma;\, qs\rangle =$$

$$= -\int d^4x \int d^4y\; {}^{out}\!\langle p'\sigma';\, k_i,\, q_i,\, \pi_i \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x)\, [\sigma_e(x),\, \psi_e^+(y)]_{\mp}\, u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle\, \delta(x^0-y^0)$$

$$+ (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p'+q'+k_1+\cdots-p-q) \left\{ \sum_{\vec{p}_n = \vec{p}+\vec{q}} \frac{{}^{out}\!\langle p'\sigma',\, k_i,\, q_i,\, \pi_i \cdots \mid \bar{u}_{s'}(q')\,\sigma_e(x) \mid n\rangle\langle n \mid \bar{\sigma}_e(x)\, u_s(q) \mid p\sigma\rangle}{p_n^0 - p^0 - q^0 - i\varepsilon} \right. \qquad (5)$$

$$\left. - \sum_{\vec{p}_n = \vec{p}-\vec{q}'} \frac{{}^{out}\!\langle p'\sigma';\, k_i,\, q_i,\, \pi_i, \cdots \mid \bar{\sigma}_e(x)\, u_s(q) \mid n\rangle\langle n \mid \bar{u}_{s'}(q')\,\bar{\sigma}_e(x) \mid p\sigma\rangle}{p_n^0 + q'^0 - p^0 - i\varepsilon} \right\}.$$

Zusätzlich zu den Forderungen der axiomatischen Feldtheorie wird nun für die beteiligten Elektronen, in Wechselwrikung mit dem Photonfeld, Gültigkeit der üblichen Quantenelektrodynamik angenommen, d.h. wir verlangen

$$\sigma_e(x) = \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_e\right)\psi_e(x) = e\, A^\mu(x)\, \gamma_\mu\, \psi_e(x) \qquad (6)$$

$$[\psi_e(x),\, \bar{\psi}_e(y)]_{\mp}\, \delta(x^0-y^0) = \gamma^0\, \delta^{(4)}(x-y) \qquad (7)$$

$$[A^\mu(\vec{x},t),\, \psi_e(\vec{y},t)] = 0 \qquad (8)$$

Diese Forderungen sind natürlich genaugenommen nicht im Einklang mit den Bedingungen der axiomatischen Feldtheorie. Eventuell auftretende Divergenzen müssen daher in üblicher Weise durch Renormierung beseitigt werden. Die im folgenden betrachtete Theorie zeigt also hinsichtlich des Elektrons und seiner Wechselwirkung mit dem Photonfeld die Eigenschaften der Quantenelektrodynamik, einschließlich der in ihr auftretenden Renormierungsprobleme, sie ist aber im übrigen nicht näher spezifiziert, als es der L-S-Z-Rahmen vorschreibt. Unser Ziel ist es, die als bekannt angesetzte Quantenelektrodynamik von den übrigen, über starke Wechselwirkung ablaufenden Prozessen zu trennen, d.h. die gesamte in der Quantenelektrodynamik enthaltene Information auszunützen, so daß schließlich nur noch die im Prinzip aus einer Theorie der starken Wechselwirkung herzuleitenden Matrixelemente der, über starke Wechselwirkung verlaufenden Pion- (bzw. Nukleon- Antinukleon) Erzeugungsprozesse, bzw. die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons einzusetzen wären, um zu endgültigen Ergebnissen zu gelangen.

Bei den folgenden Untersuchungen wird häufig ein Vergleich mit den Aussagen der üblichen Störungsrechnung für Teilchen, die alle der üblichen Quantenelektrodynamik (Nukleonen sind dann also als reine DIRAC-teilchen aufzufassen) folgen, nützlich sein. Hierfür wird die Existenz von MØLLEROperatoren (vgl. z.B. [9] oder [10]) $\Omega^{(\pm)} = \lim_{t \to \mp\infty} U(0,t)$ angenommen, die zwischen den "in"- bzw. "out"-Zuständen und den Zuständen $|\alpha\rangle^{W}$ des Wechselwirkungsbildes über

$$\Omega^{(\pm)+} |\alpha\rangle^{in}_{out} = |\alpha\rangle^{W} \tag{9}$$

vermitteln. Ferner existiere neben dem HAMILTONoperator H ein "ungestörter" HAMILTONoperator H_0 mit $H = H_0 + H_I$, der die Zeitveränderlichkeit der Operatoren $A^{W}(\vec{x}, t)$ im Wechselwirkungsbild bestimmt, und für den HEISENBERGoperator $A(\vec{x}, t)$ gelte $A(\vec{x}, 0) = A^{W}(\vec{x}, 0)$. Der S-Operator im Wechselwirkungsbild ist somit

$$S^{W} = U(\infty, -\infty) = \Omega^{(-)+} \Omega^{(+)} \tag{10}$$

mit der üblichen DYSONschen Entwicklung (vgl. [9], S. 325, 326). Es sei aber darauf hingewiesen, daß alle hieraus folgenden Ergebnisse nur heuristische Bedeutung haben, bzw. zur Verdeutlichung mancher Überlegungen dienen, da ja in dem oben definierten Rahmen ein "ungestörter" HAMILTONoperator H_o nicht existiert, somit also auch kein Wechselwirkungsbild eingeführt werden kann.

ELEKTROPROZESSE

Für die oben betrachteten Elektroprozesse ergibt sich mit (7) und (8) durch Einsetzen von (6) in (3) (wobei wegen der Vertauschungsrelation (7) der Antikommutator im ersten Summanden von (3) und somit das Minuszeichen im zeitgeordneten Produkt des zweiten Summanden gewählt wurde)

$$\langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid T \mid p\sigma; qs\rangle =$$

$$= -2\pi e\,\delta(p'+q'-p-q)\,(\bar u_{s'}(q')\,\gamma_\mu\,u_s(q))\,\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid A^\mu(o)\mid p\sigma\rangle +$$

$$+ ie^2\int d^4x\int d^4y\;\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i \dots \mid \bar u_{s'}(q')\,f^*_{q'}(x)\cdot \tag{11a}$$

$$\cdot\Big\{\theta(x^o-y^o)\,A^\mu(x)\gamma_\mu\psi_e(x)\,\bar\psi_e(y)\gamma_\nu A^\nu(y) - \theta(y^o-x^o)\,\bar\psi_e(y)\gamma_\nu A^\nu(y)A^\mu(x)\gamma_\mu\psi_e(x)\Big\}u_s(q)\,f_q(y)\mid p\sigma\rangle$$

$$\overset{=}{_{def}}\ \langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid T_1 \mid p\sigma; qs\rangle + \langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid T_2 \mid p\sigma; qs\rangle$$

bzw. die für den Vergleich mit der üblichen Störungsrechnung günstigere Form

$$\langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid T \mid p\sigma; qs\rangle = \langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid T_1 \mid p\sigma; qs\rangle + \langle q's'; p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid T_2 \mid p\sigma; qs\rangle$$

$$= -2\pi e\,\delta(p'+q'-p-q)\,(\bar u_{s'}(q')\,\gamma_\mu\,u_s(q))\,\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid A^\mu(o)\mid p\sigma\rangle +$$

$$+ ie^2\int d^4x\int d^4y\;\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i, \dots \mid \bar u_{s'}(q')\,f^*_{q'}(x)\Big\{\theta(x^o-y^o)\,A^\mu(x)\gamma_\mu T_{(-)}(\psi_e(x)\bar\psi_e(y))\gamma_\nu A^\nu(y) \tag{11b}$$

$$-\theta(y^o-x^o)\,A^\nu(y)\gamma_\mu T_{(-)}(\psi_e(x)\bar\psi_e(y))\gamma_\nu A^\mu(x)\Big\}u_s(q)\,f_q(y)\mid p\sigma\rangle\ .$$

Durch Einsetzen von (6) in (5) und unter Benützung von (7) und (8) im ersten Summanden von (5), bzw. direkt aus (11a), mit Hilfe der gleichen, von (3) zu (5) führenden Rechnungen, erhält man

$$\langle q's';\, p'\sigma';\, k_i, q_i, \pi_i \cdots | T | p\sigma;\, qs\rangle =$$

$$= -2\pi e\, \delta(p'+q'+k_1+\cdots-p-q)\,(\bar{u}_{s'}(q')\,\gamma_\mu\, u_s(q))\cdot {}^{out}\langle p'\sigma'|A^\mu(0)|p\sigma\rangle^{in} +$$

$$+ (2\pi)^4\,\delta(p'+q'+k_1+\cdots-p-q)\cdot\Big\{ \tag{12}$$

$$\cdot\Big\{ \sum_{\substack{(n)\\ \vec{p}_n=\vec{p}+\vec{q}}} \frac{{}^{out}\langle p'\sigma';\, k_i,\cdots|\bar{u}_{s'}(q')\,A^\mu(0)\,\gamma_\mu\,\psi_e(0)|n\rangle\langle n|\,\bar{\psi}_e(0)\,\gamma^\nu A_\nu(0)\,u_s(q)|p\sigma\rangle^{in}}{p_n^0-p^0-q^0-i\varepsilon}$$

$$-\sum_{\substack{(n)\\ \vec{p}_n=\vec{p}-\vec{q}'}} \frac{{}^{out}\langle p'\sigma';\, k_i,\cdots|\bar{\psi}_e(0)\,\gamma^\nu A_\nu(0)\,u_s(q)|n\rangle\langle n|\bar{u}_{s'}(q')\,A^\mu(0)\,\gamma_\mu\,\psi_e(0)|p\sigma\rangle^{in}}{p_n^0-p^0+q^{0\prime}-i\varepsilon}\Big\}$$

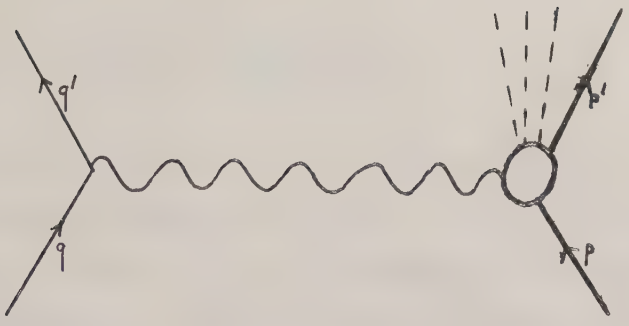
Dieser Ausdruck bildet die Grundlage für die im folgenden durchgeführte sukzessive Methode zur Abspaltung der Quantenelektrodynamik und damit zur Näherungsbehandlung des (Korrektur-) terms $\langle q's';\, p'\sigma';\, k_i,\cdots|T_2|p\sigma;\, qs\rangle$.
Mit $\Box A^\mu(x) \underset{def}{=} j^\mu(x)$ gilt fernerhin

$$\begin{aligned}{}^{out}\langle p'\sigma';\, k_i, q_i, \pi_i,\cdots|j^\mu(0)|p\sigma\rangle^{in} &= -(p'+k_1+\cdots+q_1+\cdots+\pi_1+\cdots+\pi_\ell-p)^2\,{}^{out}\langle p'\sigma';\, k_i, q_i, \pi_i\cdots|A^\mu(0)|p\sigma\rangle^{in} \\ &= -(q'-q)^2\,{}^{out}\langle p'\sigma';\, k_i, q_i, \pi_i|A^\mu(0)|p\sigma\rangle^{in}\end{aligned} \tag{13}$$

also ist schließlich der vom gleichzeitigen Kommutator in der Reduktionsformel (3) herrührende erste Summand der Ausdrücke (11) und (12)

$$\langle q's';\, p'\sigma';\, k_i, q_i, \pi_i\cdots|T_1|p\sigma;\, qs\rangle = -2\pi e\,\delta(p'+q'+k_1+\cdots-p-q)\,(\bar{u}_{s'}(q')\,\gamma_\mu\,u_s(q))\,\frac{1}{(p'-p)^2}\,{}^{out}\langle p'\sigma';\, k_i,\cdots|j^\mu(0)|p\sigma\rangle \tag{14}$$

wobei natürlich $q' \neq q$ vorausgesetzt wurde. Dieser Term hat eine ähnliche Form, wie das den Einphotonaustausch repräsentierende Glied der üblichen Störungsrechnung. Es soll (14) daher definitionsgemäß ein Graph der Form



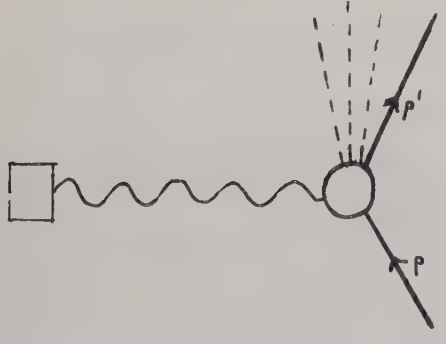
(Abb. 1)

zugeordnet werden (Abb. 1 zeigt einen Prozeß mit drei auslaufenden Mesonen) .

Das in (13) auftretende Matrixelement $\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i \cdots | A^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ ist abhängig von den Variablen p, p', $k_1, \ldots,$ $q_1, \ldots,$ $\pi_1, \ldots, \pi_\ell$. Nach dem Energie-Impuls-Satz ist

$$p' + k_1 + \ldots + q_1 + \pi_1 + \ldots + \pi_\ell - p = q - q' \underset{\text{def}}{=} k ,$$

wobei wegen $k = q - q'$ im allgemeinen nicht die bei realen Photonen bestehende Beziehung $k^2 = k_o^2 - \vec{k}^2 = 0$ gilt . $\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, q_i, \pi_i \cdots | A^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ kann man also als Matrixelement der Photoerzeugung durch e i n v i r t u e l l e s Photon auffassen . Insbesondere ist $\overset{out}{\langle} p'\sigma'; k_i, \ldots | j^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ die Fortsetzung des Matrixelementes $\langle p'\sigma'; k_i, \ldots | T | p\sigma; k \rangle$ für den realen Photoprozeß zu nicht mehr auf der Energieschale liegenden Werten der Variablen p, p', $k_1 \ldots q_1 \ldots \pi_1 \ldots \pi_\ell$, d.h. zu $k_o \neq |\vec{k}|$ hin . Entsprechend zu (Abb. 1) kann fernerhin $\overset{out}{\langle} p'\sigma'; \ldots; \pi_i, \ldots | A^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ ein Graph der in (Abb. 2) angegebenen Form zugeordnet werden ,



(Abb. 2)

(Abb. 3)

wobei durch den in (Abb. 3) gezeigten Anteil von (Abb. 2) ein virtuelles , d.h. noch außerdem an einem Elektron-Vertex (wie etwa in (Abb. 1) oder auch allgemeinerer Struktur) angreifendes Photon symbolisiert werden soll .

ELEKTRON-NUKLEON-STREUUNG

Als einfachster Elektroprozeß werde zunächst die elastische Streuung eines Elektrons an einem Nukleon betrachtet , da hierbei die Verhältnisse besonders übersichtlich sind und sich die Erweiterung des für die Elektron-Nukleon-Streuung im folgenden entwickelten Verfahrens , wenigstens für Erzeugungsprozesse von stark wechselwirkenden Teilchen , also Pionen und Nukleon-Antinukleon-Paaren , sofort angeben läßt (vgl. den Abschnitt : "Konsequente Formulierung des Verfahrens") .

Für die Elektron-Nukleon-Streuung reduziert sich (3) zu

$$\langle q's';\, p'\sigma' \mid T \mid p\sigma;\, qs\rangle = -\int d^4x \int d^4y\; \delta(x^0-y^0)\, \langle p'\sigma' \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x) \left[\bar{\sigma}_e(x),\, \psi_e^+(y)\right]_+ u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle$$

$$+ i\int d^4x \int d^4y\, \langle p'\sigma' \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x) \left\{ \Theta(x^0-y^0)\, \bar{\sigma}_e(x)\, \bar{\sigma}_e(y) - \Theta(y^0-x^0)\, \bar{\sigma}_e(y)\, \bar{\sigma}_e(x) \right\} u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle \qquad (15)$$

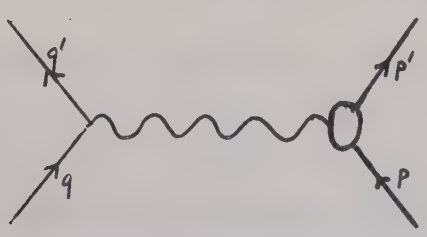
und (11) zu

$$\langle q's';\, p'\sigma' \mid T \mid p\sigma;\, qs\rangle = -2\pi e\, \delta(p'+q'-p-q)\, (\bar{u}_{s'}(q')\, \gamma_\mu\, u_s(q)) \langle p'\sigma' \mid A^\mu(0) \mid p\sigma\rangle$$

$$+ ie^2 \int d^4x \int d^4y\, \langle p'\sigma' \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x) \left\{ T_{(+)} (A^\mu(x)\, \gamma_\mu\, \psi_e(x)\, \bar{\psi}_e(y)\, \gamma_\nu\, A^\nu(y) \right\} u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle \qquad (16)$$

$$= \langle q's';\, p'\sigma' \mid T_1 \mid p\sigma;\, qs\rangle \quad + \quad \langle q's';\, p'\sigma' \mid T_2 \mid p\sigma;\, qs\rangle$$

ein Ergebnis , das mit Hilfe von (6) , (7) und (8) natürlich auch direkt aus (15) folgt . Entsprechend der oben gegebenen Definition (vgl. Abb. 1) ist hierbei dem Summanden $\langle q's';\, p'\sigma' \mid T_1 \mid p\sigma;\, qs\rangle$ der Graph (Abb. 4) zuzuordnen .



(Abb. 4)

Analog zu (13) und zu (14) ergibt sich , wegen $\Box A^\mu(x) = j^\mu(x)$, für $p' \neq p$

$$\langle p'\sigma' \mid A^\mu(0) \mid p\sigma\rangle = \frac{-1}{(p'-p)^2} \langle p'\sigma' \mid j^\mu(0) \mid p\sigma\rangle \qquad (17)$$

und

$$\langle q's';p'\sigma'|T|p\sigma;qs\rangle = 2\pi e\,\delta(p'+q'-p-q)\,(\bar{u}_{s'}(q')\gamma_\mu u_s(q))\frac{1}{(p'-p)^2}\langle p'\sigma'|j^\mu(0)|p\sigma\rangle \qquad (18)$$

$$= \frac{2\pi e}{(2\pi)^3}\delta(p'+q'-p-q)\,(\bar{u}_{s'}(q')\gamma_\mu u_s(q))\,\frac{1}{\Delta^2}\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\chi_{t'}\{\gamma^\mu(F_1^S(\Delta^2)+\tau_3F_1^V(\Delta^2)) +$$

$$+i\sigma^{\mu\nu}\Delta_\nu(F_2^S(\Delta^2)+\tau_3F_2^V(\Delta^2))\}u_\sigma(p)\chi_t\ ,$$

mit $\Delta_\nu = (p'-p)_\nu$ und $\Delta^2 = (p'-p)^2$.

In (18) ist die aus allgemeinen Invarianzbetrachtungen folgende Zerlegung von $\langle p'\sigma'|j^\mu(0)|p\sigma\rangle$ im Raum der DIRACspinoren $u_\sigma(p)$, bzw. der PAULI-isospinoren χ_t des Nukleons benutzt worden (vgl. z.B. [11]). Hierbei ist t der bisher unterdrückte Isospinindex, $F_{1,2}^{S,V}(\Delta^2)$ sind die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons, mit der Normierung

$$F_1^S(0) = F_1^V(0) = \frac{e}{2}\ ,\quad F_2^S(0) = \frac{\mu_a^{(p)}+\mu_a^{(n)}}{2} \approx -0{,}06\,\mu_B\ ,\quad F_2^V(0) = \frac{\mu_a^{(p)}-\mu_a^{(n)}}{2} \approx 1{,}85\,\mu_B \qquad (19)$$

(wobei für die anomalen magnetischen Momente $\mu_a^{(p)}$ und $\mu_a^{(n)}$ des Protons bzw. des Neutrons die bekannten Näherungswerte eingesetzt wurden).

Für die oben durchgeführten Betrachtungen wurde $p' \neq p$ angenommen. Im folgenden werden Matrixelemente der Form $\langle p'\sigma'|A^\mu(0)|p\sigma\rangle$ unter Integralen auftreten, wobei über die Impulse integriert wird, so daß die Bedingung $p' \neq p$ nicht immer erfüllt ist. Falls diese Integrale über die durch die rechte Seite von (17) ersetzten Ausdrücke $\langle p'\sigma'|A^\mu(0)|p\sigma\rangle$ divergieren, ist der Übergang von (13) zu (14), der in entsprechender Weise auch (17) und (18) bewirkt, nicht erlaubt. Eine eindeutige Festlegung des Integrationsweges in der Umgebung von $\Delta^2 = 0$ ergibt sich aber sofort unter Benutzung von

$$A^\mu(x) = A^\mu_{in}(x) + \int D_{ret}(x-x')\,j^\mu(x')\,d^4x' \quad \text{und} \quad D_{ret}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \tilde{D}_{ret}(p^2)\,e^{-ipx}\,d^4p \qquad (20)$$

Hiermit folgt nämlich, als Verallgemeinerung von (17)

$$\langle p'\sigma'|A^\mu(0)|p\sigma\rangle = \tilde{D}_{ret}(\Delta^2)\langle p'\sigma'|j^\mu(0)|p\sigma\rangle \qquad (21)$$

für $p' \neq p$ in Übereinstimmung mit (17).

Berechnet man den $\langle q's';p'\sigma'|T_1|p\sigma;qs\rangle$ entsprechenden Wirkungsquerschnitt, so ergibt sich in bekannter Weise die ROSENBLUTHformel.

Somit enthält also

$$\langle q's';\, p'\sigma' \mid T_2 \mid p\sigma;\, qs\rangle = -e^2 \int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x) \{ T(-) (\bar{\psi}_e(x)\, \bar{\psi}_e(y)) \}\, u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle$$

$$= -e^2 \int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' \mid \bar{u}_{s'}(q')\, f^*_{q'}(x) \{ T(-) (A^\mu(x)\, \gamma_\mu\, \psi_e(x)\, \bar{\psi}_e(y)\, \gamma_\nu\, A^\nu(y)) \}\, u_s(q)\, f_q(y) \mid p\sigma\rangle \tag{22}$$

samtliche sich zur ROSENBLUTHformel ergebenden Korrekturen .

Vergleich mit der Störungsrechnung

Zur Veranschaulichung dieser Ergebnisse ist es nützlich , zu überlegen , in welcher Weise in ihnen die Ausdrücke der Störungsrechnung enthalten sind . Hierzu nehmen wir an , es gelte (9) und (10) . Mit der hieraus folgenden Beziehung (vgl. [9]) .

$$\langle p'\sigma' \mid A^\mu(0) \mid p\sigma\rangle = {}^{\omega}\!\langle p'\sigma' \mid T(A^\mu(0)\, \Omega^{(-)+}\, \Omega^{(+)}) \mid p\sigma\rangle^{\omega} = {}^{\omega}\!\langle p'\sigma' \mid T(A^\mu(0)\, S^{\omega}) \mid p\sigma\rangle^{\omega} \tag{23}$$

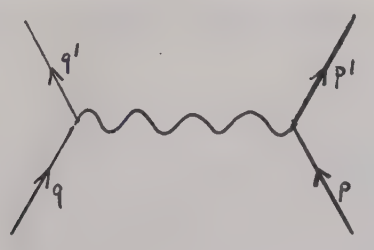
ergibt sich dann

$$\langle p'\sigma' \mid A^\mu(0) \mid p\sigma\rangle = \tilde{D}_{ret}(\Delta^2)\, \langle p'\sigma' \mid j^\mu(0) \mid p\sigma\rangle = {}^{\omega}\!\langle p'\sigma' \mid T\{A^\mu(0)\, (-i) \int \mathcal{H}_I(x)\, d^4x + \dots\} \mid p\sigma\rangle^{\omega}$$

$$= {}^{\omega}\!\langle p'\sigma' \mid -i \int d^4x \; T(A^\mu(0)\, A^{\nu\,\omega}(x)\, j^{\omega}_{\nu}(x)) + \dots \mid p\sigma\rangle^{\omega} \tag{24}$$

$$= \frac{i}{2}\, \tilde{D}_F(\Delta^2)\, {}^{\omega}\!\langle p'\sigma' \mid j^{\mu\,\omega}(0) \mid p\sigma\rangle^{\omega} + \dots$$

Selbst wenn das Nukleon also als reines DIRACteilchen behandelt wird , mit dem Strom $j^{\mu\,\omega}(x) = :\bar{\psi}^{\omega}(x)\, \gamma^\mu\, \psi^{\omega}(x):$, ist dem Ausdruck $\langle q's';\, p'\sigma' \mid T_1 \mid p\sigma;\, qs\rangle$ in (16) somit nicht der Graph



(Abb. 5)

entsprechend dem ersten Summanden $\frac{i}{2}\, \tilde{D}_F(\Delta^2)\, {}^{\omega}\!\langle p'\sigma' \mid j^{\mu\,\omega}(0) \mid p\sigma\rangle^{\omega}$ der Reihe in (24)

zuzuordnen . Vielmehr erhält man $\langle q's'; p'\sigma' | T_1 | p\sigma; qs\rangle$ durch Aufsummation der ganzen , der Entwicklung des Operators S^W entsprechenden Reihe in (24) . $\langle q's'; p'\sigma' | T_1 | p\sigma; qs\rangle$ enthält also auch im reinen DIRACfalle bereits die Aufsummation aller Vertexparts . Bei den in unserem Fall gemachten Voraussetzungen ist außerdem noch $j_\mu(x)$ ganz allgemein definiert durch $\Box A_\mu(x) = j_\mu(x)$, enthält also z.B. noch den gesamten Mesonenstrom .

Für den Term $\langle q's'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; qs\rangle$ in (16) ergibt sich entsprechend zu (11b)

$$\langle q's'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; qs\rangle = ie^2 \int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' | \bar{u}_{s'}(q') \psi^*_{q'}(x) \{ \theta(x^0 - y^0) A^\mu(x) \gamma_\mu T_{(-)}(\psi_e(x) \bar{\psi}_e(y)) \gamma_\nu A^\nu(y) - \theta(y^0 - x^0) A^\nu(y) \gamma_\mu T_{(-)}(\psi_e(x) \bar{\psi}_e(y)) \gamma_\nu A^\mu(x) \} u_s(q) \psi_q(y) | p\sigma \rangle \tag{25a}$$

und wenn man hier , nach Einsetzen von

$$\psi_e(x) = \psi_e^{in}(x) + \int S_{ret}(x - x') \sigma_e(x') \, d^4x' ,$$

nur die Kontraktionen von $\psi_e^{in}(x)$ berücksichtigt (vgl. [2])

$$\langle q's'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; qs\rangle = -\frac{ie^2}{2} \int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' | \bar{u}_{s'}(q') \psi^*_{q'}(x) \{ \gamma_\mu S_F(x - y) \gamma_\nu T(A^\mu(x) A^\nu(y)) \} u_s(q) \psi_q(y) | p\sigma \rangle \tag{25b}$$

+ Glieder höherer Ordnung in e .

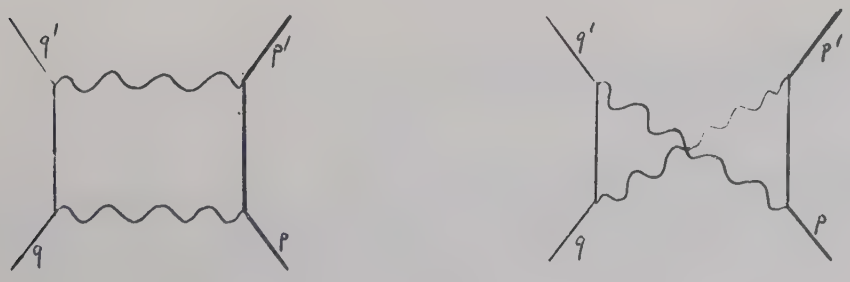
Hier folgt durch Übergang zum Wechselwirkungsbild

$$\langle p'\sigma' | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | p\sigma \rangle = {}^{W}\langle p'\sigma' | T(S^W A^\mu(x) A^\nu(x)) | p\sigma \rangle^W$$

$$= e^2 \int d^4x' \int d^4y' \, {}^{W}\langle p'\sigma' | T(\mathcal{H}_I(x') \mathcal{H}_I(y') A^\mu(x) A^\nu(y)) | p\sigma \rangle^W + \cdots \tag{27}$$

$$= e^2 \int d^4x' \int d^4y' \, \{ D_F(x - x') D_F(y - y') \, {}^{W}\langle p'\sigma' | T(j^\mu(x') j^\nu(y')) | p\sigma \rangle^W + D_F(x - y') D_F(y - x') \, {}^{W}\langle p'\sigma' | T(j^\nu(x') j^\mu(y')) | p\sigma \rangle^W \} + \cdots$$

Im Falle reiner DIRACteilchen enthält also $\langle q's'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; qs\rangle$ Graphen der Form



(Abb. 6

ergibt also , abgesehen von den Strahlungskorrekturen am Elektron , in niedrigster Näherung in e , den Zweiphotonenaustausch , der in der störungstheoretischen Näherung klein gegenüber dem Einphoton-Austausch ist . Daher wird man erwarten , daß $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ auch im hier betrachteten allgemeineren Fall nur eine Korrektur zu dem den gesamten Einphoton-Austausch enthaltenden Matrixelement $\langle q's';p'\sigma'|T_1|p\sigma;qs\rangle$ ist . Ob das tatsächlich zutrifft, kann natürlich nur die Berechnung von $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ zeigen . Im folgenden soll daher ein Näherungsverfahren angegeben werden , das es im Prinzip gestattet , $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ durch Matrixelemente der virtuellen Photoprozesse auszudrücken .

Zwischenzustände in der LOWgleichung für $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$.

Ausgangspunkt für die im folgenden durchgeführte Näherungsbehandlung von $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ ist die aus (5) bzw. (12) für den Fall der Elektron-Nukleon-Streuung folgende Darstellung von $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ durch die LOWgleichung

$$\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle = (2\pi)^4\,\delta(p'+q'-p-q)\cdot\Big\{$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\substack{(n)\\ \vec p_n=\vec p+\vec q}}\frac{\langle p'\sigma'|\bar u_{s'}(q')\,\bar\sigma_e(0)|n\rangle\langle n|\,\bar\sigma_e(0)\,u_s(q)|p\sigma\rangle}{p_n^0-p^0-q^0-i\varepsilon}$$

$$-\sum_{\substack{(n)\\ \vec p_n=\vec p-\vec q'}}\frac{\langle p'\sigma'|\,\bar\sigma_e(0)u_s(q)|n\rangle\langle n|\,\bar u_{s'}(q')\,\bar\sigma_e(0)\,|p\sigma\rangle}{p_n^0-p^0+q^{0\prime}-i\varepsilon}\Big\} \qquad (27a)$$

$$= (2\pi)^4\,\delta(p'+q'-p-q)\cdot\Big\{$$

$$\cdot e^2\Big\{\sum_{\substack{(n)\\ \vec p_n=\vec p+\vec q}}\frac{\langle p'\sigma'|\,\bar u_{s'}(q')A^{\mu}(0)\gamma_\mu\psi_e(0)|n\rangle\langle n|\bar\psi_e(0)\gamma^\nu A_\nu(0)\,u_s(q)|p\sigma\rangle}{p_n^0-p^0-q^0-i\varepsilon} \qquad (27b)$$

$$-\sum_{\substack{(n)\\ \vec p_n=\vec p-\vec q'}}\frac{\langle p'\sigma'|\,\bar\psi_e(0)\,\gamma^\nu A_\nu(0)\,u_s(q)\,|n\rangle\langle n|\bar u_{s'}(q')A^{\mu}(0)\gamma_\mu\,\psi_e(0)|p\sigma\rangle}{p_n^0-p^0+q^{0\prime}-i\varepsilon}\Big\}\,.$$

Es soll zunächst untersucht werden, welche Zwischenzustände in der LOW-gleichung auftreten können , d. h. einen nichtverschwindenden Beitrag liefern . Die in $j^\mu(x)$ und somit , über $A^\mu(x) = A^{\mu\,in}(x) + \int D_{ret}(x-x')j^\mu(x')d^4x'$, auch in $A^\mu(x)$ enthaltene starke Wechselwirkung wurde bisher nicht näher spezifiziert . Als zusätzliches Postulat zu (6) , (7) und (8) sei nun aber für die Matrixelemente $\langle n|\, j^\mu(0)\,|p\sigma;\ldots\rangle^{in}$ der übliche Nukleonen-Erhaltungssatz gefordert (das wurde bereits bei der Isospin-Zerlegung in (18) benützt). Hieraus folgt , daß in den nichtverschwindende Matrixelemente ergebenden Zwischenzuständen von (27) jeweils ein Nukleon neben weiteren Nukleon-Antinukleon-Paaren auftreten muß .

Ferner gilt der folgende Satz :

In den Zwischenzuständen des ersten Summanden ist

Negatronenzahl minus Positronenzahl = 1 .

Für Zwischenzustände auf der Energieschale handelt es sich bei dieser Aussage um den Elektronenerhaltungssatz ; denn hierfür sind die Matrixelemente

$$\langle n|\,\bar\psi_e(0)\,u_s(q)\,|p\sigma\rangle^{out} = \langle n|\,e\,A^\mu(0)\,\bar\psi_e(0)\,\gamma_\mu\,u_s(q)\,|p\sigma\rangle^{out} \tag{28}$$

in der LOWgleichung ja gerade die Streuamplituden T(n;p, q) einer Streuung aus dem Anfangszustand $|p\sigma, q_s\rangle^{in}$ in den Endzustand $|n\rangle^{out}$.

Der obige Satz lautethier also

Negatronenzahl minus Positronenzahl im Anfangszustand =

Negatronenzahl minus Positronenzahl im Endzustand = 1

Der Satz gilt dann natürlich auch für nicht auf der Energieschale liegende Matrixelemente .

Dieser Elektronenerhaltungssatz ist der für unseren Fall spezialisierte Leptonenerhaltungssatz , da wir von weiteren , mit dem Elektron schwach wechselwirkenden Leptonen von vornherein abgesehen haben , was sich darin äußerte , daß

$$\bar\psi_e(x) = e\,A^\mu(x)\,\gamma_\mu\,\psi_e(x) \tag{29}$$

gesetzt wurde , d, h. Wechselwirkung des Elektrons allein mit dem elektromagnetischen Feld angenommen wurde .

Der Beweis dieses Satzes kann durch sukzessives Einsetzen der Beziehung

$$\psi_e(x) = \psi_e^{out}(x) + \int S_{av}(x-x')\,\bar{O}_e(x')\,d^4x' = \psi_e^{out}(x) + e\int S_{av}(x-x')A^r(x')\gamma_r\psi_e(x')\,d^4x'$$

in (28) erfolgen . Einfacher und übersichtlicher ist der folgende heuristische Beweis , der zudem deutlicher erkennen läßt , welche störungstheoretischen Glieder in den Matrixelementen der LOWgleichung enthalten sind . Hierzu sei noch angenommen , daß , entsprechend der Tatsache , daß die Elektronen nur mit dem elektromagnetischen Feld , nach (29) , wechselwirken , wie üblich gilt

$$j^r(x) = j_e^r(x) + j_{(w)}^r(x) = e :\bar{\psi}_e(x)\gamma^r\psi_e(x): + j_{(w)}^r(x) \quad \text{mit} \quad [\psi_e(\vec{x},t),\, j_{(w)}(\vec{x}',t)] = 0 .$$

Wegen

$$\langle n|\,\bar{O}_e(0)\,|p,\sigma\rangle^{in} = \langle n|\,T(\bar{O}_e(0)\,S^w)\,|p\sigma\rangle^w =$$

$$= \langle n|\,\bar{O}_e(0)\,|p\sigma\rangle^w - i\,\langle n|\int d^4x\,T(\bar{O}_e(0)\,\mathcal{H}_I^w(x))\,|p\sigma\rangle^w + \dots ,$$

mit $O_e(0) = e\,A^r(0)\gamma_r\psi_e(0)$ und $\mathcal{H}_I(x) = j^r(x)A_\mu(x) = (j_{(e)}^r(x) + j_{(w)}^r(x))\,A_\mu(x)$,

ist in den nicht von vornherein verschwindenden Matrixelementen $\langle n|\,\bar{O}_e(0)\,|p\sigma\rangle^{in}$ die Zahl der Negatron-Erzeugungsoperatoren minus der Zahl der Positron-Erzeugungsoperatoren gleich eins , woraus der obige Satz folgt .

Es sind somit als niedrigste Zwischenzustände (abgesehen von Photonen und Pionen) möglich :

$|n\rangle$ = |1 Nukleon , 1 Negatron$\rangle$ = $|p_1,\, q_1\rangle$

$|n\rangle$ = |1 Nukleon , 2 Negatronen , 1 Positron$\rangle$ = $|p_1, q_1, q_2, \bar{q}_1\rangle$

Daß dagegen Zustände

$|n\rangle$ = |1 Nukleon$\rangle$ = $|p_1\rangle$

$|n\rangle$ = |1 Nukleon , 2 Negatronen$\rangle$ = $|p_1, q_1, q_2\rangle$

oder $|n\rangle$ = |1 Nukleon, 1 Negatron, 1 Positron$\rangle$ = $|p_1, q_1, \bar{q}_1\rangle$

keinen Beitrag liefern , erkennt man übrigens auch sofort , wenn man bedenkt , daß die Zahl der in $\langle n|\,\bar{O}_e(0)\,|p\sigma\rangle^{in}$ auf den Zwischenzustand $|n\rangle^w$ wirkenden Elektronoperatoren ungerade ist , so daß nur für ungerade Negatron- plus-Positron-Zahl im Zwischenzustand die Matrixelemente von Null verschieden

sind .

Hier seien noch die Matrixelemente in (27) mit den beiden oben angegebenen Zwischenzuständen vom Standpunkt der Störungstheorie aus diskutiert , um Aussagen über ihre Größenordnung machen zu können .
Für den Zustand $|n\rangle$ = |1 Nukleon , 1 Negatron$\rangle$ = $|p_1 \sigma_1, q_1 s_1\rangle$ ergibt sich z.B. das Matrixelement

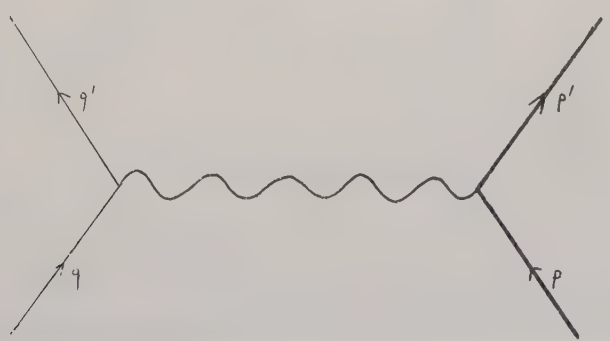
$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 | \bar{\psi}_e(0) u_s(q) | p\sigma \overset{in}{\rangle} = \overset{w}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 | e A^\mu(0) \gamma_\mu u_s(q) | p\sigma \overset{w}{\rangle} +$$

$$+ (-i) \overset{w}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 | e^2 \int d^4x \, T(A^\mu(0) \bar{\psi}_e(0) \gamma_\mu u_s(q) A^{\nu w}(x) (j^{w}_{\nu(e)}(x) + j^{w}_{\nu(M)}(x))_{p\sigma} \overset{w}{\rangle} + \dots$$

Hier ist der erste Summand Null , der zweite dagegen ergibt einen Ausdruck

$$\sim e \bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma_\mu u_s(q) \tilde{D}_F((p_1-p)^2) \overset{w}{\langle} p_1\sigma_1 | j^\mu_{(M)}(0) | p\sigma \overset{w}{\rangle} .$$

Dem zum niedrigsten Zwischenzustand in der LOWgleichung (27) gehörenden Matrixelement $\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 | \bar{\psi}_e(0) u_s(q) | p\sigma \overset{in}{\rangle}$ entspricht also in niedrigster (e^2 -) Näherung der Störungsrechnung , wenn man das Nukleon wieder als reines DIRACteilchen ansieht , ein Graph der Form



(Abb. 7)

Für das zum Zwischenzustand

$|n\rangle$ = |1 Nukleon , 2 Negatronen , 1 Positron$\rangle$ = $|p_1, q_1, q_2, \bar{q}_1\rangle$

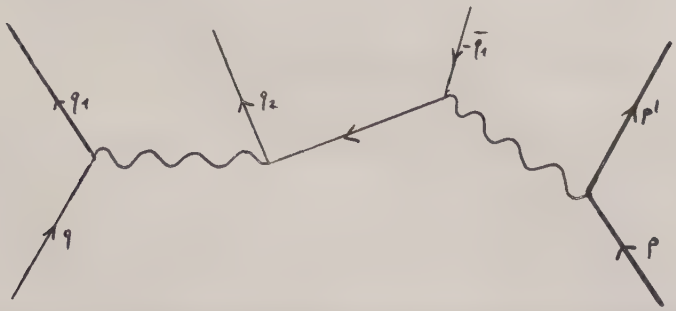
gehörende Matrixelement $\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 ; q_2 s_2 ; \bar{q}_1 \bar{s}_1 | \bar{\psi}_e(0) u_s(q) | p\sigma \overset{in}{\rangle}$ ist der erste nicht verschwindende Summand der DYSONschen Reihe , wenn man zunächst nur Matrixelemente auf der Energieschale betrachtet ,

$$(-i)^3 \frac{1}{3!} \overset{w}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 ; q_2 s_2 ; \bar{q}_1 \bar{s}_1 | \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \, T(\bar{\psi}_e(0) u_s(q) \mathcal{H}_I^{w}(x_1) \mathcal{H}_I^{w}(x_2) \mathcal{H}_I^{w}(x_3)) | p\sigma \overset{w}{\rangle} .$$

Somit ergeben sich für diesen Zwischenzustand in niedrigster (e^4 -) Näherung Ausdrücke der Gestalt

$$\sim e^3 \bar{u}_{s_1}(q_1)\gamma^\mu u_{s_1}(q)\,\tilde{D}_F((q_1-q)^2)\,\bar{u}_{s_2}(q_2)\gamma^\mu \tilde{S}_F(q_1+q_2-q)\,\gamma^\nu u_{s_1}(\bar{q}_1)\,\tilde{D}_F((p-p_1)^2)\,\tilde{\langle} p_1\sigma_1|j_\nu^{\tilde{}}(0)|p\sigma\tilde{\rangle}^{\tilde{}} ,$$

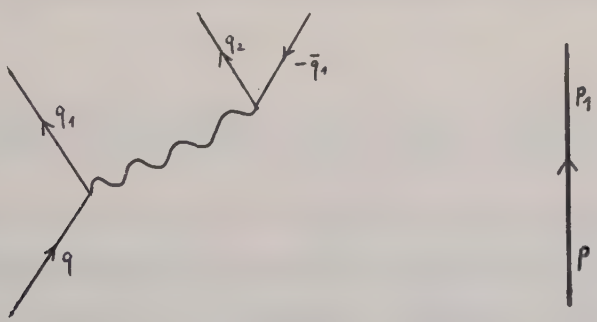
die im reinen DIRACfalle Graphen der Form



(Abb. 8)

entsprechen. Das Einschieben von Zwischenzuständen mit einem Nukleon und mehreren Elektronen (die durch den Elektronen-Erhaltungssatz zugelassen sind) entspricht also, vom störungstheoretischen Standpunkt aus, einer Entwicklung nach Potenzen von e .

Zu beachten ist allerdings, daß, da die Matrixelemente in der LOW-gleichung nicht auf der Energieschale liegen, auch sonst durch Energie-Impuls-Satz ausgeschlossene Beiträge der Ordnung e^2, die Graphen der Form



(Abb. 9)

entsprechen, auftreten können.
Diese Beiträge stellen aber den Fall eines durch das Elektron nicht beeinflußten Nukleons dar, enthalten also Selbstenergieeffekte des Elektrons, bzw. zusammen mit den Graphen der in (Abb. 8) gezeigten Form Strahlungskorrekturen am Elektron, die, wie oben schon gesagt, unabhängig von den hier durchgeführten Betrachtungen berechnet werden können, hier also nicht berücksichtigt werden sollen. Vernachlässigt man also den 1 Nukleon - 2 Negatronen - 1 Positron - Zwischenzustand gegenüber dem 1 Nukleon - 1 Negatron - Zustand, so hat man neben Beiträgen höherer Ordnung in e nur Selbstenergieeffekte bzw. Strahlungskorrekturen (z.T. von gleicher Größenordnung in e) vernachlässigt. Führt man die höheren Zwischenzustände in der LOWgleichung dagegen mit, so ist es nötig, die den Korrektur-

effekten am Elektron entsprechenden Anteile in den Matrixelementen mit den Mehrelektronen-Zwischenzuständen sinnvoll abzuspalten (vgl. die unten durchgeführte Behandlung dieser Zwischenzustände) und unberücksichtigt zu lassen, sofern man die Strahlungskorrekturen am Elektron (vgl. hierzu etwa [12] bis [15]) bereits unabhängig berechnet hat .

Analog zu den hier durchgeführten Betrachtungen läßt sich auch der zweite Summand in (27) diskutieren . Hier hat der obige Elektronenerhaltungssatz die Form : In den Zwischenzuständen gilt

Zahl der Positronen minus Zahl der Negatronen = 1

· Neben den Elektronen und Nukleonen können in den Zwischenzuständen natürlich auch Photonen und Pionen auftreten . Die Zahl der möglichen Pionen wird eingeschränkt , wenn man noch zusätzlich für die Streuamplituden T(n;p, q) und damit für die entsprechenden (nicht auf der Energieschale liegenden) Matrixelemente $\overset{out}{\langle} n | \bar{\sigma}_e(0)\, u_s(q) | p\sigma \rangle$ Gültigkeit des Ladungserhaltungssatzes fordert .

Näherungsbehandlung von $\langle q's'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; qs \rangle$.

Da nach den oben durchgeführten störungstheoretischen Überlegungen Zwischenzustände mit mehreren Elektronen , bzw. Photonen Beiträge von höherer Ordnung in e ergeben , als der 1 Nukleon - 1 Elektron - Zwischenzustand , liegt es nahe , sich zunächst auf diesen niedrigst-möglichen Zwischen zustand zu beschränken und die dann in der LOWgleichung auftretenden Matrixelemente $\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1; q_1 s_1 | \bar{\sigma}_e(\omega u_s(q)) | p\sigma \rangle$ nach einem Verfahren weiterzubehandeln , das im Prinzip auf einer Entwicklung der Elektron-Feldoperatoren nach Potenzen von e (ähnlich , wie in (25b)) beruht .

Nach Einsetzen des 1 Nukleon - 1 Negatron - Zwischenzustandes in den ersten Summanden von (27b) ergibt sich

$$I = e^2 \sum_{\substack{|n\rangle = |1\,\text{Nukl.},\,1\,\text{Negatr.}\rangle \\ \vec{p}_n = \vec{p} + \vec{q}}} \frac{\langle p'\sigma' | \bar{u}_{s'}(q') A^\mu(0) \gamma_\mu \psi_e(0) | n\rangle \langle n | \psi_e(0) \gamma^\nu A_\nu(0) u_s(q) | p\sigma\rangle}{p_n^\circ - p^\circ - q^\circ - i\varepsilon} \tag{30}$$

$$= e^2 \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ} \int \frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^\circ} \sum_{s_1,\sigma_1=1}^{2} \frac{\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{p} - \vec{q}) \langle p'\sigma' | \bar{u}_{s'}(q') A^\mu(0) \gamma_\mu \psi_e(0) | p_1\sigma_1; q_1 s_1\rangle^{\text{out out}} \langle p_1\sigma_1; q_1 s_1 | \bar{\psi}_e(0) \gamma^\nu A_\nu(0) u_s(q) | p\sigma\rangle}{p_1^\circ + q_1^\circ - p^\circ - q^\circ - i\varepsilon}.$$

Setzt man hier $\psi_e(x) = \psi_e^{out}(x) + \int S_{av}(x-x')\, \sigma_e(x')\, d^4x'$ ein und berücksichtigt nur Glieder mit

$$\psi_e^{out\,(+)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{k}}{2k^\circ} \cdot \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}} u_s(k)\, a_s^{out}(k) \tag{31}$$

so folgt

$$I = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ} \int \frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^\circ} \sum_{s_1,\sigma_1=1}^{2} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{p} - \vec{q}) \frac{\langle p'\sigma' | \bar{u}_{s'}(q') A^\mu(0) \gamma_\mu u_{s_1}(q_1) | p_1\sigma_1\rangle \langle p_1\sigma_1 | \bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma^\nu u_s(q) A_\nu(0) | p\sigma\rangle}{p_1^\circ + q_1^\circ - p^\circ - q^\circ - i\varepsilon}$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ} \int \frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^\circ} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{p} - \vec{q}) \sum_{s_1=1}^{2} \frac{(\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu u_{s_1}(q_1))(\bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma_\nu u_s(q)) \sum_{\sigma_1=1}^{2} \langle p'\sigma' | A^\mu(0) | p_1\sigma_1\rangle \langle p_1\sigma_1 | A^\nu(0) | p\sigma\rangle}{p_1^\circ + q_1^\circ - p^\circ - q^\circ - i\varepsilon} \tag{32}$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ} \int \frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^\circ} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{q}_1 - \vec{p} - \vec{q}) \frac{\{\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu (\gamma_\lambda q_1^\lambda + m_e) \gamma_\nu u_s(q)\} \sum_{\sigma_1=1}^{2} \langle p'\sigma' | A^\mu(0) | p_1\sigma_1\rangle \langle p_1\sigma_1 | A^\nu(0) | p\sigma\rangle}{p_1^\circ + q_1^\circ - p^\circ - q^\circ - i\varepsilon},$$

wobei

$$\sum_{s_1=1}^{2} (\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu u_{s_1}(q_1))(\bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma_\nu u_s(q)) = \bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu (\gamma_\lambda q_1^\lambda + m_e) \gamma_\nu u_s(q) \tag{33}$$

benützt wurde .

Analog ergibt sich für den zweiten Summanden in (27b) , wenn man dort als niedrigst möglichen Zwischenzustand den 1 Nukleon - 1 Positron - Zustand einsetzt und dementsprechend aus

$$\psi_e(x) = \psi_e^{out}(x) + \int S_{av}(x-x')\, \sigma_e(x')\, d^4x'$$

nur

$$\psi_e^{out\,(-)}(x) = \sum_{s=1}^{3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2k^\circ} \cdot \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}} v_s(k)\, b_s^{+\,out}(k) \qquad \text{berücksichtigt ,} \tag{34}$$

$$II = \sum_{\substack{|n\rangle = |\text{Nukl.},\,\text{Positron}\rangle^{out} \\ \vec{p}_n = \vec{p} - \vec{q}'}} \frac{\langle p'\sigma' | \bar{\psi}_e(0) \gamma^\nu A_\nu(0) u_s(q) | n\rangle \langle n | \bar{u}_{s'}(q') A^\mu(0) \gamma_\mu \psi_e(0) | p\sigma\rangle}{p_n^\circ - p^\circ + q^{\circ\prime} - i\varepsilon} \tag{35}$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ} \int \frac{d^3\vec{\bar{q}}_1}{2\bar{q}_1^\circ} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{\bar{q}}_1 - \vec{p} + \vec{q}') \frac{\{\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu (\gamma_\lambda \bar{q}_1^\lambda - m_e) \gamma_\nu u_s(q)\} \sum_{\sigma_1=1}^{2} \langle p'\sigma' | A^\nu(0) | p_1\sigma_1\rangle \langle p_1\sigma_1 | A^\mu(0) | p\sigma\rangle}{p_1^\circ + \bar{q}_1^\circ - p^\circ + q^{\circ\prime} - i\varepsilon}$$

wobei die zu (33) analoge Beziehung

$$\sum_{\lambda_1=1}^{2} (\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu v_{s_1}(\bar{q}_1))(\bar{v}_{s_1}(\bar{q}_1) \gamma_\nu u_s(q)) = \bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu (\bar{q}_1^{\,\lambda} \gamma_\lambda - m_e) \gamma_\nu u_s(q) \tag{36}$$

benutzt wurde .

Somit ist also in dieser Näherung :

$$\langle q's'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; qs \rangle = 2\pi \delta^{(4)}(p'+q'-p-q) \cdot$$

$$\cdot e^2 \Big\{ \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^0} \int \frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^0} \delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{q}_1-\vec{p}-\vec{q}) \frac{\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu (\gamma_\lambda q_1^\lambda + m_e) \gamma_\nu u_s(q) \sum_{\sigma_1=1}^{2} \langle p'\sigma' | A^\mu(0) | p_1\sigma_1 \rangle \langle p_1\sigma_1 | A^\nu(0) | p\sigma \rangle}{p_1^0 + q_1^0 - p^0 - q^0 - i\varepsilon} \tag{37}$$

$$- \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^0} \int \frac{d^3\vec{q}_1}{2\bar{q}_1^0} \delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{q}_1+\vec{q}'-\vec{p}) \frac{\bar{u}_{s'}(q') \gamma_\mu (\gamma_\lambda \bar{q}_1^\lambda - m_e) \gamma_\nu u_s(q) \sum_{\sigma_1=1}^{2} \langle p'\sigma' | A^\mu(0) | p_1\sigma_1 \rangle \langle p_1\sigma_1 | A^\nu(0) | p\sigma \rangle}{p_1^0 + \bar{q}_1^0 + q'^0 - p^0 - i\varepsilon} \Big\} .$$

Die in (37) auftretenden Matrixelemente enthalten die hier als bekannt angesehenen Formfaktoren , sind also im Prinzip bestimmt . Somit ist in der hier benutzten Näherung der Korrekturterm zurückgeführt auf ein Integral über bekannte Funktionen und Matrixelemente , die , unabhängig von den hier durchgeführten Überlegungen , mit Hilfe einer Theorie der starken Wechselwirkung zu bestimmen sind .
Insbesondere ergibt sich nach (17) und (18)

$$\sum_{\sigma_1=1}^{2} \langle p'\sigma' | A^\mu(0) | p_1\sigma_1 \rangle \langle p_1\sigma_1 | A^\nu(0) | p\sigma \rangle = \tilde{D}_{ret}(\Delta'^2)\, \tilde{D}_{ret}(\Delta^2) \langle p'\sigma' | j^\mu(0) | p_1\sigma_1 \rangle \langle p_1\sigma_1 | j^\nu(0) | p\sigma \rangle \tag{38}$$

$$= \tilde{D}_{ret}(\Delta'^2)\, \tilde{D}_{ret}(\Delta^2) \frac{1}{(2\pi)^6} \bar{u}_{s'}(p') \{ F_1(\Delta'^2) \gamma^\mu + F_2(\Delta'^2) i\sigma^{\mu\varrho} \Delta'_\varrho \} (\gamma^\lambda p_{2\lambda} + m_e) \{ F_1(\Delta^2) \gamma^\nu + F_2(\Delta^2) i\sigma^{\nu\kappa} \Delta_\kappa \} u_s(p)$$

wobei $\Delta' = p' - p_1$ und $\Delta = p_1 - p$ ist .

Zur Ableitung von (32) aus (30) wurde $\psi_e(x)$ durch $\psi_e^{in}(x)$ ersetzt. Die vernachlässigten Glieder ergeben Beiträge von höherer Ordnung in e . Wegen $\sigma_e(x) = e A^\mu(x) \gamma_\mu \psi_e(x)$ enthält nämlich das vernachlässigte Integral $\int S_{\alpha\sigma}(x-x') \sigma_e(x') d^4x'$ einen zusätzlichen Faktor e .

Ferner ergibt sich

$$\langle p'\sigma'|\bar{u}_{s'}(q')A^{\mu}(0)\gamma_{\mu}\psi_e^{out(-)}(0)|q_1s_1;p_1\sigma_1\rangle^{out} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\vec{k}}{2k^0}\sum_{s=1}^{2}\langle p'\sigma'|\bar{u}_{s'}(q')A^{\mu}(0)\gamma_{\mu}v_s(k)b_s^{+out}(k)|q_1s_1;p_1\sigma_1\rangle^{out}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4x\int\frac{d^3k}{2k^0}\sum_{s=1}^{2}(\bar{u}_{s'}(q')\gamma_{\mu}v_s(k))\Big\{\langle p'\sigma'|\bar{v}_s(k)\gamma^0[A^{\mu}(0),\psi_e(x)]\delta(x^0) \tag{39}$$

$$-i\bar{v}_s(k)(A^{\mu}(0)\sigma_e(x)\theta(x^0)+\sigma_e(x)A^{\mu}(0)\theta(-x^0))|q_1s_1;p_1\sigma_1\rangle^{out}\Big\}f_{-k}^{*}(x)\ .$$

Dieser Ausdruck ist also wegen $[A^{\mu}(0),\psi_e(x)]\delta(x^0)=\sigma$, und da wieder die Größen $\sigma_e(x)$ im zeitgeordneten Produkt auftreten, ebenfalls von höherer Ordnung in e, als der mitgeführte Summand. Somit bedeutet also das Ersetzen von $\psi_e(x)$ durch $\psi_e^{out(+)}(x)$ Berücksichtigung der niedrigsten Potenz einer Entwicklung des Elektronenfeldes nach Potenzen von e.

Anstatt $\psi_e(x)$ durch $\psi_e^{out(+)}(x)$ zu ersetzen, kann man auch in etwas anderer, übersichtlicherer Weise zu dem obigen Ergebnis (37) gelangen. Hierzu betrachten wir etwa das Matrixelement $\langle p'\sigma'|\sigma_e(0)|p_1\sigma_1;q_1s_1\rangle^{out}$ in (27a). Nach der üblichen Reduktionstechnik ist

$$\langle p'\sigma'|\sigma_e(0)|p_1\sigma_1;q_1s_1\rangle^{out} = \langle p'\sigma'|\int d^4x\,\delta(x^0)[\sigma_e(0),\psi_e^{+}(x)]_{\mp}u_{s_1}(q_1)f_{q_1}(x)|p_1\sigma_1\rangle - \tag{40}$$

$$-i\int d^4x\langle p'\sigma'|\bar{\sigma}_e(x)\sigma_e(0)\theta(-x^0)-\sigma_e(0)\bar{\sigma}_e(x)\theta(x^0)|p_1\sigma_1\rangle u_{s_1}(q_1)f_{q_1}(x)\ .$$

Hierbei ist, nach den geforderten Vertauschungsrelationen (7) und (8) für die Feldoperatoren $\psi_e(x)$ und $A^{\mu}(x)$, das Glied mit dem gleichzeitigen Kommutator

$$\int d^4x\,\delta(x^0)[\sigma_e(0),\psi_e^{+}(x)]_{\mp}f_{q_1}(x) = \int d^4x\,\delta(x^0)\,e\,[A^{\mu}(0)\gamma_{\mu}\psi_e(0),\psi_e^{+}(x)]_{\mp}f_{q_1}(x) = \tag{41}$$

$$= e\int d^4x\,\delta^{(4)}(x)\,A^{\mu}(0)\gamma_{\mu}f_{q_1}(x) = e\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}A^{\mu}(0)\gamma_{\mu}\ .$$

Das Glied mit dem zeitgeordneten Produkt ist von höherer Ordnung in e als das mit dem gleichzeitigen Kommutator. Setzt man daher nur (41) in (27) ein und in analoger Weise für

$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 \,|\, \bar{\sigma}_e(0)\, u_s(q) \,|\, p\sigma\rangle = \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 \,|\, \bar{\psi}_e(0)\, \gamma^\nu A_\nu(0)\, u_s(q) \,|\, p\sigma\rangle$$

$$\langle p'\sigma' |\, \bar{\sigma}_e(0)\, u_s(q) \,|\, p_1\sigma_1 ; \bar{q}_1 \bar{s}_1\rangle^{out} = \langle p'\sigma' |\, \bar{\psi}_e(0)\, \gamma^\nu A_\nu(0)\, u_s(q) \,|\, p_1\sigma_1 ; \bar{q}_1 \bar{s}_1\rangle^{out}$$

und $$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; \bar{q}_1 \bar{s}_1 \,|\, \bar{u}_{s'}(q')\, \sigma_e(0) \,|\, p\sigma\rangle = \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; \bar{q}_1 \bar{s}_1 \,|\, \bar{u}_{s'}(q')\, A^\mu(0)\, \gamma_\mu\, \psi_e(0) \,|\, p\sigma\rangle$$

ebenfalls nur die gleichzeitigen Kommutatoren , so ergibt sich wiederum (37) . Das Ersetzen von $\psi_e(x)$ durch $\psi_e^{out}(x)$ ist also gleichbedeutend damit, daß man bei der Reduktion hinsichtlich der Elektronen nur den gleichzeitigen Kommutator berücksichtigt . Das letztere Verfahren hat aber den Vorteil , daß die vernachlässigten Glieder besser diskutiert werden können . Wie man aus (40) entnimmt , sind diese gerade von der gleichen Form (zeitgeordnete Produkte) , wie der Korrekturterm $\langle q's' ; p'\sigma' |\, T_2 \,|\, p\sigma ; qs\rangle$ selbst . Wenn es also gelingt zu zeigen , daß dieser klein gegenüber $\langle q's' ; p'\sigma' |\, T_1 \,|\, p\sigma ; qs\rangle$, d.h. gegenüber dem Glied mit dem gleichzeitigen Kommutator der Reduktion von $\langle q's' ; p'\sigma' |\, T \,|\, p\sigma ; qs\rangle$ ist , so ist damit automatisch gezeigt , daß die oben vernachlässigten Glieder ebenfalls klein gegenüber den mitgeführten Summanden sind , also als Korrekturen in der Korrektur zu Recht vernachlässigt werden durften . Mit diesen Überlegungen läßt sich (siehe unten) eine konsequentere Formulierung des hier durchgeführten Näherungsverfahrens angeben .

Höhere Zwischenzustände

Die Beschränkung auf $|n\rangle$ = |1 Nukleon , 1 Elektron$\rangle$ war natürlich nicht wesentlich. Vielmehr ergibt sich sofort , wenn neben dem einen Nukleon und dem einen Elektron im Zwischenzustand noch $\tilde{n}$ Pionen und Nukleonen (Nukleon-Antinukleon-Paare) , aber keine weiteren Elektronen oder Photonen (hierzu siehe unten) vorhanden sind , wenn also gilt

$$|n\rangle = |1 \text{ Nukleon} , 1 \text{ Elektron} , \tilde{n}(\text{Pionen} + \text{Nukleonen})\rangle = |p_1\sigma_1 ; q_1 s_1 ; \pi_1, \pi_2, \cdots, p_2\sigma_2, \cdots\rangle$$
$$= |p_1\, \sigma_1 \,;\, q_1\, s_1 \,;\, \tilde{n}\rangle \qquad (42)$$

analog zu (37) aus (27)

$$\langle q's';\, p'\sigma' \,|\, T_2 \,|\, p\sigma;\, qs\rangle = 2\pi\,\delta(p'+q'-p-q)\cdot \tag{43}$$

$$\cdot e^2\Bigg\{\sum_{\tilde n}\int\frac{d^3\vec p_1}{2p_1^\circ}\int\frac{d^3\vec q_1}{2q_1^\circ}\,\delta^{(3)}(\vec p_1+\vec q_1+\vec p_{\tilde n}-\vec p-\vec q)\,\frac{\{\bar u_{s'}(q')\gamma_\mu(\gamma_\lambda q_1^\lambda+m_e)\gamma_\nu u_s(q)\}\sum_{\sigma_1=\pm1}^{2}\langle p'\sigma'|A^\mu(0)|p_1\sigma_1;\tilde n\rangle\langle p_1\sigma_1;\tilde n|A^\nu(0)|p\sigma\rangle}{p_1^\circ+q_1^\circ+p_{\tilde n}^\circ-p^\circ-q^\circ-i\varepsilon}$$

$$-\sum_{\tilde n}\int\frac{d^3\vec p_1}{2p_1^\circ}\int\frac{d^3\vec q_1}{2\bar q_1^\circ}\,\delta^{(3)}(\vec p_1+\vec q_1+\vec p_{\tilde n}-\vec p+\vec q')\,\frac{\{\bar u_{s'}(q')\gamma_\mu(\gamma_\lambda\bar q_1^\lambda-m_e)\gamma_\nu u_s(q)\}\sum_{\sigma_1=\pm1}^{2}\langle p'\sigma'|A^\nu(0)|p_1\sigma_1;\tilde n\rangle\langle p_1\sigma_1;\tilde n|A^\mu(0)|p\sigma\rangle}{p_1^\circ+\bar q_1^\circ+p_{\tilde n}^\circ+q'^\circ-p^\circ-i\varepsilon}\Bigg\}$$

wobei wiederum nur der gleichzeitige Kommutator bei der Reduktion der Matrixelemente $\langle p'\sigma'|A^\mu(0)\,\gamma_\mu\,\psi_e(0)\,|q_1 s_1;\, p_1\sigma_1;\,\tilde n\rangle^{out}$, $\overset{out}{\langle} q_1 s_1;\, p_1\sigma_1;\,\tilde n\,|\,\bar\psi_e(0)A^\nu(0)\gamma_\nu|p\sigma\rangle$ u. s. w. hinsichtlich des Elektrons q_1 im Zwischenzustand berücksichtigt wurde. Vernachlässigt wurden gegenüber diesen Matrixelementen, wie oben, die Glieder mit den zeitgeordneten Produkten, d. h. Ausdrücke der Gestalt (vgl. (40)).

$$-i\int d^4x\,\langle p'\sigma'|\,\bar\psi_e(x)\,\psi_e(0)\,\Theta(-x^\circ)-\psi_e(0)\,\bar\psi_e(x)\,\Theta(x^\circ)\,|p_1\sigma_1;\,\tilde n\rangle^{out}\,u_{s_1}(q_1)\,e^{iq_1x}\,. \tag{44}$$

Diese können nach Einschieben von Zwischenzuständen wieder auf die Form einer LOWgleichung gebracht und in gleicher Weise diskutiert werden, wie (43) selbst. Da (44) jedoch von höherer Ordnung in e ist als $e\langle p'\sigma'|A^\mu(0)\gamma_\mu|p_1\sigma_1;\tilde n\rangle^{out}$ wurde es als Korrektur zur Korrektur vernachlässigt.

Die in (43) auftretenden Matrixelemente $\langle p'\sigma'|A^\mu(0)\,|p_1\sigma_1;\,\tilde n\rangle^{out}$ sind die oben (vgl. Formel (11) bis (14)) diskutierten Matrixelemente der Elektroerzeugung durch ein virtuelles Photon (bzw. im einfachsten Fall, d. h. für $\tilde n = 0$ natürlich wieder, wie in (37), im wesentlichen die Formfaktoren), also Matrixelemente, die prinzipiell aus einer Theorie der starken Wechselwirkung zu bestimmen sind.

KONSEQUENTE FORMULIERUNG DES NÄHERUNGSVERFAHRENS

Die bisher durchgeführten Überlegungen basierten im wesentlichen auf störungstheoretischen Argumenten, d.h. es wurden Glieder höherer Ordnung in e gegenüber solchen niedrigerer Ordnung vernachlässigt. Das oben durchgeführte Näherungsverfahren läßt sich nun aber auch weitgehend unabhängig von solchen Argumenten formulieren (vgl. hierzu auch die Methode von DOEBNER [16]), obwohl gerade sie eine schnelle Konvergenz des Verfahrens erwarten lassen und somit den hier eingeschlagenen Weg nahelegen.

Im folgenden sehen wir von der Beschränkung auf die Elektron-Nukleon-Streuung ab und lassen auch Elektroerzeugungsprozesse von Pionen und Nukleon-Antinulkeon-Paaren zu, dagegen sollen keine zusätzlichen Elektronen oder Photonen erzeugt werden. Es werden also T-Matrixelemente

$$\langle q's';\ p'\sigma';\ \pi_1,\dots\pi_\ell;\ \bar{p}_1',\ p_1';\dots\ |\ T\ |\ p\sigma;\ qs\rangle \tag{45}$$

untersucht. Hierfür gilt die Darstellung (12). Als Zwischenzustände $|n\rangle$ werden zunächst (vgl. (42)) nur Zustände

$$\begin{aligned}|n\rangle &= |1\text{ Nukleon},\ 1\text{ Elektron},\ \tilde{n}\text{-Pionen} + \text{Nukleon-Antinukleon-Paare}\rangle \\ &= |\ p_1\sigma_1;\ q_1 s_1;\ \pi_1\dots\pi_\ell,\ p_2\bar{p}_2\dots\rangle\end{aligned} \tag{46}$$

(bezüglich weiterer Elektronen bzw. Photonen in $|n\rangle$ siehe unten) eingeschoben. Es ergibt sich dann aus (5) mit

$$\langle q's';\ p'\sigma';\ \pi_1,\pi_2,\dots\ |\ T\ |\ p\sigma;\ qs\rangle = \delta(q'+p'+\pi_1+\dots-p-q)\ T(q's',\ p'\sigma';\ \pi_1,\dots;\ p\sigma,\ qs) \tag{47}$$

durch Einsetzen von (46)

$$\begin{aligned}T(q's',p'\sigma';\pi_1,\dots;\ p\sigma,\ qs) &= T_1(q's',\ p'\sigma';\ \pi_1,\dots;\ p\sigma,\ qs) + T_2(q's',p'\sigma';\pi_1,\dots;p\sigma,qs) = \\ &= -2\pi e\,(\bar{u}_{s'}(q')\,\gamma_\mu\,u_s(q))\ {}^{out}\langle p'\sigma';\ \pi_1,\dots\ |\ A^\mu(0)\ |p\sigma\rangle^{in} + \\ &+ (2\pi)^4\Big\{\int\frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ}\int\frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^\circ}\sum_{\tilde{n}}\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{q}_1+\vec{p}_{\tilde{n}}-\vec{p}-\vec{q})\ \frac{{}^{out}\langle p'\sigma',\pi_1,\dots|\bar{u}_{s'}(q')\,\bar{O}_e(0)|p_1\sigma_1,q_1s_1,\tilde{n}\rangle^{out\ out}\langle q_1\sigma_1,\tilde{n}|\bar{O}_e(0)\,u_s(q)|p\sigma\rangle}{p_1^\circ+q_1^\circ+p_{\tilde{n}}^\circ-p^\circ-q^\circ-i\varepsilon} \\ &- \int\frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^\circ}\int\frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^\circ}\sum_{\tilde{n}}\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{q}_1+\vec{p}_{\tilde{n}}-\vec{p}+\vec{q}')\ \frac{{}^{out}\langle p'\sigma',\pi_1,\dots|\bar{O}_e(0)\,u_s(q)|\bar{q}_1\sigma_1,p_1\sigma_1,\tilde{n}\rangle^{out\ out}\langle\bar{q}_1\sigma_1,p_1\sigma_1,\tilde{n}|\bar{u}_{s'}(q')\,\bar{O}_e(0)|p\sigma\rangle}{p_1^\circ+\bar{q}_1^\circ+p_{\tilde{n}}^\circ-p^\circ+q^{\circ\prime}-i\varepsilon}\Big\}.\end{aligned} \tag{48}$$

Für das im zweiten Summanden von (48), d.h. in $T_2(q's';p'\sigma',\pi_1,\dots;p\sigma,qs)$ auftretende Matrixelement $\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_1 s_1, \tilde{n} \mid \bar{\psi}_e(0) u_s(q) \mid p\sigma\rangle$ gilt nach Reduktion hinsichtlich des Elektrons q_1

$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_1 s_1, \tilde{n} \mid \bar{\psi}_e(0) u_s(q) \mid p\sigma\rangle = \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_1 s_1, \tilde{n} \mid e A^\mu(0) \bar{\psi}_e(0) \gamma_\mu u_s(q) \mid p\sigma\rangle =$$

$$= \int d^4x \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \tilde{n} \mid f^*_{q_1}(x) \bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma^0 [\psi_e(x), \bar{\psi}_e(0)]_+ \delta(x^0) u_s(q) \mid p\sigma\rangle -$$

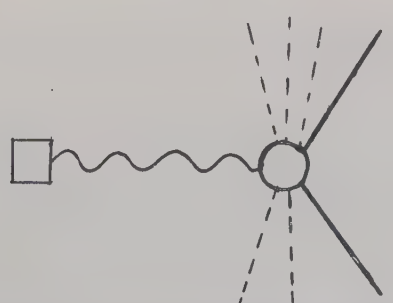
$$- i \int d^4x \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \tilde{n} \mid f^*_{q_1}(x) \bar{u}_{s_1}(q_1) \{ \psi_e(x) \bar{\psi}_e(0) \Theta(x^0) - \bar{\psi}_e(0) \psi_e(x) \Theta(-x^0) \} u_s(q) \mid p\sigma\rangle = \tag{49}$$

$$= e \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (\bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma^\mu u_s(q)) \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \tilde{n} \mid A_\mu(0) \mid p\sigma\rangle -$$

$$- (2\pi)^{3/2} \sum_m \left\{ \delta^{(3)}(\vec{q}_1 + \vec{p}_1 + \vec{p}_{\tilde{n}} - \vec{p}_m) \frac{\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \tilde{n} \mid \bar{u}_{s_1}(q_1) \psi_e(0) \mid m\rangle \langle m \mid \bar{\psi}_e(0) u_s(q) \mid p\sigma\rangle}{p_m^0 - p_1^0 - q_1^0 - p_{\tilde{n}}^0 - i\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \delta^{(3)}(\vec{p}_m + \vec{q}_1 - \vec{p}) \frac{\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \tilde{n} \mid \bar{\psi}_e(0) u_s(q) \mid m\rangle \langle m \mid \bar{u}_{s_1}(q_1) \psi_e(0) \mid p\sigma\rangle}{p_m^0 + q_1^0 - p^0 - i\varepsilon} \right\}.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die drei anderen Matrixelemente in (48). In (49) kann man nun wiederum $|m\rangle$ durch (46) ersetzen, hinsichtlich des im Zwischenzustand vorhandenen Elektrons reduzieren, den gleichzeitigen Kommutator ausrechnen, das zeitgeordnete Produkt wie in (49) behandeln und so fortfahren. Man zieht also sukzessive die gleichzeitigen Kommutatoren aus den jeweils verbleibenden Resttermen heraus. Die Glieder mit den gleichzeitigen Kommutatoren entsprechen den virtuellen Einphoton - Austauschgraphen



(Abb. 10)

Somit hat man also das gesamte T-Matrixelement sukzessive auf virtuelle Einphoton - Prozesse zurückgeführt. Überwiegen diese, so wird man

schnelle Konvergenz des Verfahrens erwarten . Umgekehrt kann man dies durch sukzessives Einsetzen der als bekannt vorausgesetzten virtuellen Einphotonprozesse in die Formeln (48) und (49) nachprüfen , bzw. Koorekturen zu den Einphotonprozessen berechnen , die ihrerseits mit Hilfe dieser Einphotonprozesse im Prinzip in jeder Näherung gegeben sind .

Mehrelektronen- und Photonen-Zwischenzustände

Bei den bisherigen Überlegungen wurde die Zahl der Elektronen in den Zwischenzuständen $|n\rangle$ der LOWgleichung auf eins beschränkt , Photonen waren keine zugelassen (vgl. (42) und (46)) . Diese Beschränkung wurde in erster Näherung durch die oben durchgeführten störungstheoretischen Überlegungen gerechtfertigt , da die hierbei vernachlässigten Matrixelemente von höherer Ordnung in e sind , als die bei dem obigen Näherungsverfahren berücksichtigten . Vom Standpunkt einer konsequenten Zurückführung des gesamten Ausdruckes (12) für $\langle q'\lambda'; p'\sigma'; \pi_1 .. |T| p\sigma; q\lambda\rangle$ auf virtuelle Einphoton-Prozesse aus , erscheint es dagegen wünschenswert , die Fortsetzung des Verfahrens auch für beliebig viele Elektronen (in Übereinstimmung mit dem Elektronenerhaltungssatz) und Photonen in den Zwischenzuständen anzugeben .

Zur Diskussion der hierbei auftretenden Besonderheiten soll als Beispiel der nach dem 1 Nukleon - 1 Negatron - Zwischenzustand folgende nächsthöhere , d.h. der 1 Nukleon - 2 Negatronen - 1 Positron - Zwischenzustand betrachtet werden .

Es treten also in der LOWgleichung Matrixelemente der Form :

$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_1\lambda_1 ; q_2\lambda_2 ; \bar{q}_1\bar{\lambda}_1 | \bar{\psi}_e(0)\, u_s(q) |p\sigma\rangle^{in} \qquad (50)$$

auf . Reduziert man hier , analog zu (3) , hinsichtlich des Elektrons q_1 , so ergibt sich

$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_1 s_1, q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{\sigma}_e(0) u_s(q) \mid p\sigma \overset{in}{\rangle} = \int d^4x\, \delta(x^0) \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{u}_{s_1}(q_1) f^*_{q_1} [\sigma^+_e(0), \psi_e(x)]_{\mp} u_s(q) \mid p\sigma \overset{in}{\rangle} -$$

$$- i \int d^4x \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{u}_{s_1}(q_1) f^*_{q_1}(x) \{ \bar{\sigma}_e(0) \sigma_e(x) \theta(-x^0) - \sigma_e(x) \bar{\sigma}_e(0) \theta(x^0) \} u_s(q) \mid p\sigma \overset{in}{\rangle} . \tag{51}$$

Für den Summanden mit dem gleichzeitigen Kommutator folgt hieraus

$$\int d^4x \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{u}_{s_1}(q_1) f^*_{q_1}(x)\, \delta(x^0) [\sigma^+_e(0), \psi_e(x)]_{\mp} u_s(q) \mid p\sigma \overset{in}{\rangle} =$$

$$= e \tfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} (\bar{u}_{s_1}(q_1) \gamma_\mu u_s(q)) \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid A^\mu(0) \mid p\sigma \overset{in}{\rangle} . \tag{52}$$

Dieser Ausdruck soll in niedrigster Näherung hinsichtlich e untersucht werden . Es gilt

$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid A^\mu(0) \mid p\sigma \rangle = \int d^4x\, \delta(x^0) \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{u}_{s_2}(q_2) f^*_{q_2}(x) [\psi_e(x), A^\mu(0)]_{\mp} \mid p\sigma \rangle$$

$$- i \int d^4x \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{u}_{s_2}(q_2) f^*_{q_2}(x) \{ \sigma_e(x) A^\mu(0) \theta(x^0) + A^\mu(0) \sigma_e(x) \theta(-x^0) \} \mid p\sigma \rangle . \tag{53}$$

Wegen (8) ist der gleichzeitige Kommutator Null , dagegen folgt für das T-Produkt

$$\{ \sigma_e(x) A^\nu(0) \theta(x^0) + A^\nu(0) \sigma_e(x) \theta(-x^0) \} =$$

$$= e \gamma_\nu \psi_e(x) \theta(x^0) \left(\theta(x^0) A^\nu(x) A^\mu(0) + \theta(-x^0) A^\mu(0) A^\nu(x) \right) +$$

$$+ e \left(\theta(x^0) A^\nu(x) A^\mu(0) + \theta(-x^0) A^\mu(0) A^\nu(x) \right) \theta(-x^0) \psi_e(x) \gamma_\nu . \tag{54}$$

Ersetzt man hier also $A^\mu(x)$ und $A^\nu(x)$ durch $A^{\mu\,in}(x)$ und $A^{\nu in}(x)$, so ergibt sich in niedrigster Näherung bezüglich e

$$\overset{out}{\langle} p_1\sigma_1 ; q_2 s_2, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid A^\mu(0) \mid p\sigma \rangle =$$

$$= i e \int d^4x \overset{out}{\langle} p_1\sigma_1, \bar{q}_1 \bar{s}_1 \mid \bar{u}_{s_2}(q_2) f^*_{q_2}(x) \gamma^\mu \psi_e(x) \tfrac{1}{2} D_F(x) \mid p\sigma \rangle . \tag{55}$$

Reduziert man nun noch hinsichtlich des Positrons und läßt dabei den gleichzeitigen Kommutator unberücksichtigt , der in (12) zur Selbstenergie und zu Strahlungskorrekturen des Elektrons gehörende Terme liefert , die hier nicht

behandelt werden sollen (vgl. hierzu die diesbezügliche Diskussion bei der störungstheoretischen Behandlung dieser Matrixelemente) , so ergibt sich nach den gleichen Überlegungen , die von (54) zu (55) führten , in niedrigster Näherung hinsichtlich e

$$
{}^{out}\langle p_1\sigma_1, q_2\sigma_2, \bar{q}_1\bar{\sigma}_1 | A^\mu(0) | p\sigma\rangle = \tag{56}
$$

$$
= \frac{-e^2}{(2\pi)^3} \widetilde{D}_F(q_2+\bar{q}_1+p_1-p)\, \bar{u}_{\sigma_2}(q_2)\gamma^\mu \widetilde{S}_F(p-p_1-\bar{q}_1)\gamma^\varrho v_{\bar{\sigma}_1}(\bar{q}_1) \langle p_1\sigma_1 | A_\varrho(0) | p\sigma\rangle
$$

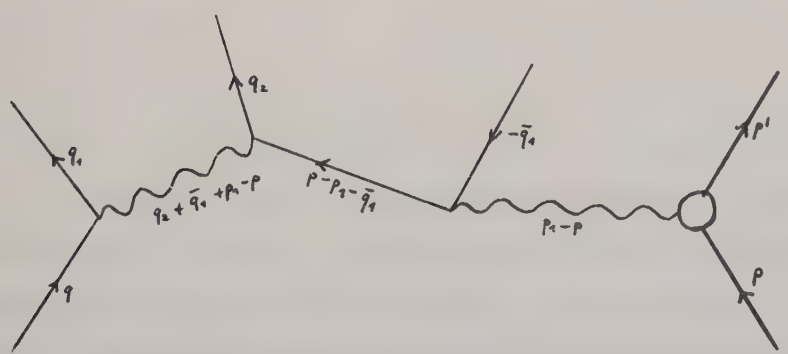
und somit nach Einsetzen von (56) in (52)

$$
\int d^4x\, {}^{out}\langle p_1\sigma_1, q_2\sigma_2, \bar{q}_1\bar{\sigma}_1 | \bar{u}_{\sigma_1}(q_1) f^*_{q_1}(x)\, \delta(x^0) \big[\sigma_e^+(0), \psi_e(x) \big]_+ u_\sigma(q) | p\sigma\rangle^{in}
$$

$$
= \frac{-e^3}{(2\pi)^{3/2}} (\bar{u}_{\sigma_1}(q_1)\gamma_\mu u_\sigma(q))\, \widetilde{D}_F(q_2+\bar{q}_1+p_1-p)\, \bar{u}_{\sigma_2}(q_2)\gamma^\mu S_F(p-p_1-\bar{q}_1)\gamma^\varrho v_{\bar{\sigma}_1}(\bar{q}_1) \cdot \tag{57}
$$

$$
\cdot \langle p_1\sigma_1 | A_\varrho(0) | p\sigma\rangle \ .
$$

Also ist (57) in niedrigster Näherung der Graph



(Abb. 11)

zugeordnet .

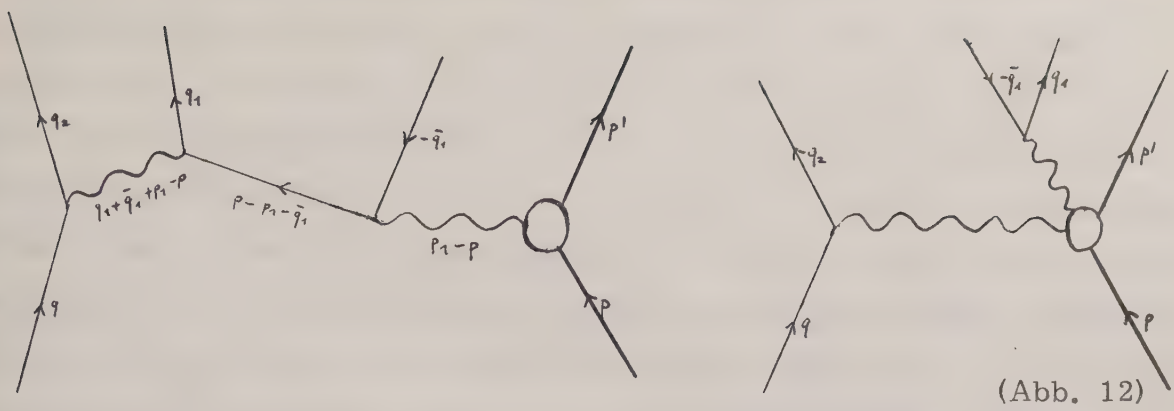
In analoger Weise zeigt man , daß im zeitgeordneten Produkt von (51) Ausdrücke der Form

$$
\frac{-e^3}{(2\pi)^{3/2}} (\bar{u}_{\sigma_2}(q_2)\gamma_\mu u_{\sigma_1}(q_1))\, \widetilde{D}_F(q_1+\bar{q}_1+p_1-p)\, \bar{u}_{\sigma_1}(q_1)\gamma^\mu \widetilde{S}_F(p-p_1-\bar{q}_1)\gamma^\varrho v_{\bar{\sigma}_1}(\bar{q}_1) \langle p_1\sigma_1 | A_\varrho(0) | p\sigma\rangle \tag{58}
$$

$$
-e^2 \int d^4x\, (\bar{u}_{\sigma_2}(q_2)\gamma_\mu u_{\sigma_1}(q_1))\, f^*_{q_1}(x)\, f_{\bar{q}_1}(x)\, (\bar{u}_{\sigma_1}(q_1)\gamma^\nu v_{\bar{\sigma}_1}(\bar{q}_1)) \langle p_1\sigma_1 | T(A^\mu(0) A^\nu(x)) | p\sigma\rangle \tag{59}
$$

u. s. w.

enthalten sind , die in niedrigster Näherung hinsichtlich e den Graphen



(Abb. 12)

entsprechen. Anders als im Falle eines Elektrons im Anfangs- und im Endzustand treten hier also im zeitgeordneten Produkt Ausdrücke gleicher Größenordnung wie im gleichzeitigen Kommutator von (51) auf . Der zweite Summand von (51) darf also hier nicht als Korrektur zum ersten aufgefaßt werden . Das ist nicht verwunderlich , denn da das Elektron q_1 im Zwischenzustand nicht vor q_2 ausgezeichnet ist , bringt die Reduktion hinsichtlich q_1 eine Unsymmetrie in die Reduktionsformel (51) hinein , die sich darin äußert , daß nun der durch Vertauschen von q_1 und q_2 entstehende Ausdruck im zweiten Summanden von (51) auftritt , während er bei umgekehrter Reduktion natürlich im ersten Summanden stehen würde . Systematischer hat man daher so vorzugehen (vgl. hierzu die ausführlichere Diskussion dieser Fragen bei der Negatron - Positron - Paarerzeugung) , daß man erst hinsichtlich aller Elektronen gleichmäßig reduziert, entsprechend den allgemeinen Reduktionsformeln beim Bosonen-Fall (vgl. etwa [17] Seite 103) und dann alle Ausdrücke mit zeitlichen δ-Funktionen zu gleichzeitigen Kommutatoren zusammenfaßt . Nach relativ umständlicher Rechnung erhält man dann in niedrigster Näherung wieder die Ausdrücke (57) , (58) , (59) und die durch Vertauschung der Impulse entstehenden , den üblichen FEYNMANgraphen niedrigster Näherung entsprecehnden Matrixelemente . Die verbleibenden Restterme (z.B. zeitgeordnete Produkte) lassen sich dann in der , in den vorangehenden Abschnitten diskutierten Weise , weiter behandeln . Hiermit ist es also möglich , das oben angegebene Verfahren bei beliebigen Zwischenzuständen durchzuführen , d.h. es gelingt im Prinzip nach sinnvoller Abspaltung der gesamten Quantenelektrodynamik des Elektrons alle Ausdrücke auf die als bekannt vorausgesetzten Matrixele-

mente der virtuellen Einphotonprozesse zurückzuführen . Bei Näherungsrechnungen wird man sich natürlich auf die Ausdrücke niedrigster Ordnung in e beschränken , wie sie etwa z.T. in (57) bis (59) angegeben sind . Hierbei kann man dann übrigens auch Ausdrücke der Form (59) vernachlässigen , die obwohl von gleicher Größenordnung in e wie (57) oder (58) aus kinematischen Gründen klein sind . Das erkennt man z.B. aus einer Diskussion der entsprechenden FEYNMANgraphen für ein als DIRACteilchen aufgefaßtes Nukleon . Eine bessere Begründung hierfür wird unten für den entsprechenden Fall bei der Paarerzeugung durch ein reelles Photon gegeben (vgl. den Abschnitt "Niederenergietheorem") .

Matrixelemente der Einphotonprozesse

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt , wie virtuelle Photoprozesse sukzessive auf Ausdrücke zurückgeführt werden können , in denen als unbekannte Funktionen nur noch Matrixelemente der Form

$$\langle p'\sigma'; \pi_1; \dots \mid A^\mu(\omega) \mid \dots p\sigma \rangle \tag{60}$$

auftraten , die mit anderen Methoden , im Prinzip aus einer Theorie der starken Wechselwirkung , zu bestimmen wären . In dieser Arbeit soll nur die Abspaltung der Quantenelektrodynamik von den durch starke Wechselwirkung bestimmten Anteilen der Elektroprozesse untersucht werden , so daß die Aufgabe im Prinzip gelöst ist , wenn alle Ausdrücke auf die Matrixelemente (60) zurückgeführt werden können . Immerhin sollen hier aber noch einige Bemerkungen darüber angeschlossen werden , welche Aussagen die derzeitige Theorie über diese Matrixelemente zuläßt .

Tatsächlich existiert bekanntlich noch keine Methode , die eine wirkliche Berechnung dieser Ausdrücke gestatten würde . Die verläßlichsten Ergebnisse wurden bisher durch die, als halbphänomenologisch anzusehenden dispersionstheoretischen Überlegungen gewonnen . Hier ergaben sich die besten Resultate insbesondere für den durch

$$\langle p'\sigma' \mid A^{\mu}(0) \mid p\sigma \rangle \tag{61}$$

beschriebenen einfachsten Einphoton-Prozeß, d.h. nach (17) und (18) für die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons. Durch die Dispersionsrelationen (vgl. [11]) für die Größen $F_{1,2}^{S,V}$ werden unter der Annahme von 2-Pion-und 3-Pion-Resonanzen (vgl. [18]) folgende Ausdrücke für die Formfaktoren nahegelegt [19]:

$$F_1^{V,S} = \frac{e}{2} \cdot \left\{ (1 - a_{V,S}) + \frac{a_{V,S}}{1 - t/t_{V,S}} \right\} \tag{62a}$$

$$F_2^{V,S} = \frac{e \cdot g_{V,S}}{2M} \cdot \left\{ (1 - b_{V,S}) + \frac{b_{V,S}}{1 - t/t_{V,S}} \right\} \tag{62b}$$

mit $t = \Delta^2 = (p'-p)^2$, $\frac{e}{2M}(g^S + g^V) = \mu_e^{(p)}$, $\frac{e}{2M}(g^S - g^V) = \mu_e^{(n)}$ und den experimentell zu bestimmenden Konstanten $a_{V,S}$, $b_{V,S}$ und $t_{V,S}$, für die sich nach [19] ergab

$$a_V = b_V = 1,2\,, \quad a_S = 0,4\,, \quad t_V = 22\, m_\pi^2\,, \quad t_S = 8\, m_\pi^2 \quad (?)$$

(Zu beachten ist, daß bei der hier gewählten Metrik $t = (p'-p)^2 = (p_o' - p_o)^2 - (\vec{p}' - \vec{p})^2$ gilt, so daß im physikalischen Bereich der Elektron-Nukleon-Streuung $t \leq 0$ ist).

Die hier angegebenen Funktionen können also mit (38) zur Berechnung von (37) in niedrigster Näherung benützt werden.

Ansätze zu einer dispersionstheoretischen Behandlung wurden ferner für die Pionerzeugung durch ein virtuelles Photon, d.h. für das Matrixelement

$$\overset{out}{\langle} p'\sigma'; \pi \mid A^{\mu}(0) \mid p\sigma \rangle = \frac{-1}{(p' + \pi - p)^2} \overset{out}{\langle} p'\sigma'; \pi \mid j^{\mu}(0) \mid p\sigma \rangle \tag{63}$$

angegeben (näheres hierzu siehe [20], [21], [22]). Die Zerlegung von $\overset{out}{\langle} p'\sigma'; \pi \mid j^{\mu}(0) \mid p\sigma \rangle$ nach γ-Matrizen bzw. τ-Matrizen, im Raum der DIRACspinoren bzw. PAULIspinoren, ergibt achtzehn invariante Funktionen, die noch von den Variablen $s = (p' + \pi)^2$, $(q'-q)^2$ und $(p'-p)^2$ abhängen. Für diese Funktionen werden Dispersionsrelationen in s gefordert, die es im Prin-

zip ermöglichen , den Einfluß der 3/2 - 3/2 - Pion-Nukleon-Resonanz auf (63) zu berechnen , womit es möglich wäre , diese auch in unseren Ausdrücken (z.B. in (43)) zu berücksichtigen .
Tatsächlich liegen , wohl wegen der Schwierigkeit der Rechnungen , noch keine expliziten Ergebnisse aus der Dispersionstheorie für (63) vor . Das Auftreten von Formfaktoren in den Poltermen der Dispersionsrelationen , anstelle ihrer statischen Werte beim realen Pion-Photoerzeugungsprozeß , (vgl. hierzu etwa [21] oder [22]) legt es aber nahe, modellmäßig die bei der realen Pion-Photoerzeugung , nach der Methode von CHEW , GOLDBERGER , LOW und NAMBU [23] gefundenen expliziten Ergebnisse , multipliziert mit den Formfaktoren , zur näherungsmäßigen Berechnung von (43) zu verwenden (vgl. hierzu die entsprechende Methode in [2]) .

Die Berücksichtigung von Mehrpionen-Prozessen in (43) dürfte zur Zeit kaum in einigermaßen verläßlicher Weise möglich sein .

Dispersionsrelation für $\langle q'\lambda'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; q\lambda \rangle$.

Den Ausdruck (43) kann man auch als Ausgangspunkt einer Dispersionsrelation für $\langle q'\lambda'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; q\lambda \rangle$ benützen . Mit $W_\nu = (p' + p)_\nu$, $\Delta_\nu = (p' - p)_\nu = -(q' - q)_\nu$ und $Q_\nu = (q' + q)_\nu$ ergibt sich nämlich unter Benützung von

$$\bar{u}_{\sigma'}(p') \, (\gamma^\mu W_\mu) \, u_\sigma(p) = 2M \, \bar{u}_{\sigma'}(p') \, u_\sigma(p) \tag{64a}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p') \, (\gamma^\mu \Delta_\mu) \, u_\sigma(p) = 0 \tag{64b}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p') \, (i \sigma^{\mu\nu} W_\nu) \, u_\sigma(p) = - \bar{u}_{\sigma'}(p') \, \Delta^\mu \, u_\sigma(p) \tag{64c}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p') \, (i \sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu) \, u_\sigma(p) = \bar{u}_{\sigma'}(p') \, (2M \gamma^\mu - W^\mu) \, u_\sigma(p) \tag{64d}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p')\,(\gamma_5 \gamma^\mu W_\mu)\,u_\sigma(p) = 0 \tag{64e}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p')\,(\gamma_5 \gamma^\mu \Delta_\mu)\,u_\sigma(p) = -2M\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\,\gamma_5\,u_\sigma(p) \tag{64f}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p')\,(i\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} W_\nu)\,u_\sigma(p) = -\bar{u}_{\sigma'}(p')\,(2M\gamma_5\gamma^\mu + \gamma_5 \Delta^\mu)\,u_\sigma(p) \tag{64g}$$

$$\bar{u}_{\sigma'}(p')\,(i\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu)\,u_\sigma(p) = -\bar{u}_{\sigma'}(p')\,(\gamma_5 W^\mu)\,u_\sigma(p) \tag{64h}$$

$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 = \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho}\,\gamma_\lambda\gamma_\varrho \tag{64i}$$

und $$\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu = \gamma^\lambda g^{\mu\nu} - \gamma^\mu g^{\lambda\nu} + \gamma^\nu g^{\lambda\mu} - \varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}\gamma_\varrho\gamma^5 \tag{64k}$$

(bzw. der entsprechenden Ausdrücke für die Spinoren und γ-Matrizen des Elektrons) wenn man

$$\langle q's';\, p'\sigma' \mid T_2 \mid p\sigma;\, qs\rangle = \delta(q'+p'-q-p)\; T_2(q', p';\, p, q) \quad \text{setzt:}$$

$$\begin{aligned} T_2(q', p';\, p, q) = {} & \bar{u}_{s'}(q')\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\,\Big\{ B_1 + B_2\,\gamma^\mu_{(e)} W_\mu + B_3\,\gamma^\mu Q_\mu + \\ & + B_4\,\gamma^\mu_{(e)} W_\mu \gamma^\nu Q_\nu + B_5\,\gamma^\mu_{(e)}\gamma_\mu + B_6\,\sigma^{\mu\nu}_{(e)}\sigma_{\mu\lambda} W_\nu Q^\lambda + \\ & + B_7\,\sigma^{\mu\nu}_{(e)}\sigma_{\mu\nu} + B_8\,\gamma^5_{(e)}\gamma^\mu_{(e)}\gamma^5\gamma^\nu W_\mu Q_\nu \Big\}\,u_\sigma(p)\,u_s(q) \\ = {} & \bar{u}_{s'}(q')\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\,\Big\{ \sum_{i=1}^{8} \Gamma_i\, B_i \Big\}\,u_\sigma(p)\,u_s(q)\,. \end{aligned} \tag{65}$$

Nimmt man für die Funktionen B_i eine Dispersionsrelation

$$B_i(s,t,u) = \frac{1}{\pi}\int_{(M+m_e)^2} \frac{B_i^I(s';t)}{s'-s}\,ds' + \frac{1}{\pi}\int_{(M+m_e)^2} \frac{B_i^I(t,u')}{u'-u}\,du' + \text{eventuelle Subtraktionsterme} \tag{66}$$

an, wie sie aus der MANDELSTAMdarstellung [24] (vgl. auch [25]) für die

$B_i(s,t,u)$ folgt ($s=W^2$, $t=\Delta^2$, $u=(q'-p)^2$) , so lassen sich wegen

$$\frac{i}{2}\left\{T_2^*(p,q;p',q') - T_2(q',p';p,q)\right\} = \bar{u}_{s'}(q')\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\left(\sum_{i=1}^{16}\Gamma_i\,\mathrm{Im}\,B_i(s,t,u)\,u_\sigma(p)\,u_s(q)\right) \quad (67)$$

(hierbei ist $\gamma^0\Gamma_i^+(p,q;p',q')\gamma^0 = \Gamma_i(p',q';p,q)$ benützt) die Funktionen B_i^{I} und B_i^{II} mit Hilfe der aus (43) folgenden Beziehung

$$\frac{i}{2}\left\{T_2^*(q,p;p',q') - T_2(q',p';p,q)\right\} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{I} + \mathrm{II} =$$

$$= e^2(2\pi)^4\pi\left\{\int\frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^0}\int\frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^0}\sum_{\tilde{u}}\delta^{(4)}(p_{\tilde{u}}+p_1+q_1-p-q)\,\bar{u}_{s'}(q')\gamma_\mu(\gamma_\lambda q_1^\lambda+m_e)\gamma_\nu\,u_s(q)\cdot\right.$$

$$\cdot\sum_{\sigma_1=-1}^{2}\langle p'\sigma'|A^\mu(0)|p_1\sigma_1;\tilde{u}\rangle\langle p_1\sigma_1;\tilde{u}|A^\nu(0)|p\sigma\rangle \quad (68)$$

$$-\int\frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^0}\int\frac{d^3\vec{q}_1}{2q_1^0}\sum_{\tilde{u}}\delta^{(4)}(p_{\tilde{u}}+p_1+q_1+q'-p)\,\bar{u}_{s'}(q')\gamma_\mu(\gamma_\lambda\bar{q}_1^\lambda-m_e)\gamma_\nu\,u_s(q)\cdot$$

$$\left.\cdot\sum_{\sigma_1=-1}^{2}\langle p'\sigma'|A^\nu(0)|p_1\sigma_1;\tilde{u}\rangle\langle p_1\sigma_1;\tilde{u}|A^\mu(0)|p\sigma\rangle\right\}$$

näherungsmäßig bestimmen . Es ist dann nämlich wegen (67)

$$\bar{u}_{s'}(q')\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\sum_i\Gamma_i\,B_i^{\,I}\,u_s(q)\,u_\sigma(p) = \mathrm{I}$$

(69)

$$\bar{u}_{s'}(q')\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\sum_i\Gamma_i\,B_i^{\,II}\,u_s(q)\,u_\sigma(p) = \mathrm{II}$$

und hieraus ergeben sich die Funktionen B_i^{I} und B_i^{II} in bekannter Weise .

Es soll aber daraufhingewiesen werden , daß $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ im Prinzip ja schon durch (43) vollständig bestimmt ist . Der Umweg über eine unbewiesene Dispersionsrelation hat also nur dann Bedeutung , wenn die auftretenden Integrale leichter lösbar sind , bzw. wenn man auf diese Weise zu einer besseren Näherung gelangt .
Es treten natürlich in (68) wieder die gleichen Matrixelemente der virtuellen Einphoton-Prozesse auf , wie sie zur Berechnung von $\langle q's';p'\sigma'|T_2|p\sigma;qs\rangle$ über (43) benötigt werden .

Zur Herleitung von (68) wäre es begrifflich etwas zweckmäßiger gewesen ,

statt von (43) , direkt von (5) auszugehen . Man erhält dann zur Berechnung der Funktionen $B_i^{I,II}$

$$\frac{i}{2}\left\{T_2^*(q,p;p',q') - T_2(q',p';p,q)\right\} =$$

$$= (2\pi)^4 \pi \left\{ \sum_n \delta^{(4)}(p_n - p - q) \langle p'\sigma' | \bar{u}_{s'}(q') \sigma_e(0) | n\rangle\langle n | \bar{\sigma}_e(0) u_s(q) | p\sigma\rangle - \right. \tag{70}$$

$$\left. - \delta^{(4)}(p_n - p + q') \langle p'\sigma' | \bar{\sigma}_e(0) u_s(q) | n\rangle\langle n | \bar{u}_{s'}(q') \sigma_e(0) | p\sigma\rangle \right\}.$$

Hier gehen nun nur Matrixelemente a u f der Energieschale ein , so daß alle oben zur Ableitung von (43) durchgeführten Überlegungen hier auf die in (70) auftretenden wirklichen Matrixelemente der Elektroprozesse angewendet werden können , nicht nur , wie oben , auf deren Fortsetzung zu nicht auf der Energieschale liegenden Werten der Variablen hin . Schließlich erhält man dann aber wiederum (68) , d.h. es treten nach wie vor die Matrixelemente der virtuellen Photo-Prozesse auf .

Die Tatsache , daß man bei Behandlung von T_2 , d.h. nach Abspaltung des gleichzeitigen Kommutators in der Reduktionsformel (3) , also nach Abspaltung des virtuellen Einphoton-Prozesses in T , im Korrekturterm stets wieder auf v i r t u e l l e Photoprozesse geführt wird , erscheint als charakteristisch . Geht man nämlich nach DRELL und FUBINI [2] statt von (3) von der Reduktionsformel

$$\langle q's' ; p'\sigma' | T | p\sigma ; qs\rangle =$$

$$= i \int d^4x \int d^4y \langle q's' | \bar{u}_{\sigma'}(p') f^*_{p'}(x) \Theta(x^0 - y^0) \cdot [\sigma(x), \bar{\sigma}_e(y)] u_s(q) f_q(y) | p\sigma\rangle \tag{71}$$

aus , in der der gleichzeitige Kommutator Null ist , so ergibt sich analog zu (5) die LOWgleichung

$$\langle q's' ; p'\sigma' | T | p\sigma ; qs\rangle =$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) \left\{ \sum_{\substack{n \\ \vec{p}_n = \vec{p} + \vec{q}}} \frac{\langle q's' | \bar{u}_{\sigma'}(p') \sigma(0) | n\rangle\langle n | \bar{\sigma}_e(0) u_s(q) | p\sigma\rangle}{p_n^0 - p^0 - q^0 - i\varepsilon} \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{n \\ \vec{p}_n = \vec{q}' - \vec{p}}} \frac{\langle q's' | \bar{\sigma}_e(0) u_s(q) | n\rangle\langle n | \bar{u}_{\sigma'}(p') \sigma(0) | p\sigma\rangle}{q'^0 - q^0 - p_n^0 - i\varepsilon} \right\}. \tag{72}$$

Hier ist der niedrigste Zwischenzustand , nach ähnlichen Überlegungen wie oben , im zweiten Summanden ein 1-Photonzustand , im ersten Summanden ein 1 Nukleon - 1 Elektron - Zustand . Die Matrixelemente in (72) lassen sich hier also nicht alle auf solche von Elektroprozessen zurückführen . Fordert man , um zu Prozessen auf der Energieschale zu kommen , eine Dispersionsrelation für $\langle q's';p'\sigma'|T|p\sigma;qs\rangle$ in $t=(p'-p)^2$, so lassen sich die in ihr auftretenden Imaginärteile von $T(q',p';p,q)$ aus

$$\frac{i}{2}\{T^*(q,p;p',q') - T(q',p';p,q)\} =$$

$$= (2\pi)^4\pi\Big\{\sum_n \delta^{(4)}(p_n - p - q)\langle q's'|\bar{u}_{\sigma'}(p')\,O(0)\,|n\rangle\langle n|\,\bar{O}_e(0)\,u_s(q)\,|p\sigma\rangle - \tag{73}$$

$$-\sum_n \delta^{(4)}(p_n - q' + p)\langle q's'|\,\bar{O}_e(0)\,u_s(q)\,|n\rangle\langle n|\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\,O(0)\,|p\sigma\rangle\Big\}$$

bestimmen . Insbesondere ergibt der 1-Photon-Zwischenzustand in (73) in niedrigster Näherung bezüglich e einen Ausdruck der Form

$$(\bar{u}_{s'}(q')\,\gamma_\mu\,u_s(q))\langle p'\sigma'|\,j^\mu(0)\,|p\sigma\rangle \tag{74}$$

der nach Einsetzen in die geforderte Dispersionsrelation zu

$$(\bar{u}_{s'}(q')\,\gamma_\mu\,u_s(q))\,\frac{1}{(p'-p)^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\,\bar{u}_{\sigma'}(p')\Big\{F_1(0)\,\gamma^\mu + i\,\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu\,F_2(0)\Big\}u_\sigma(p) \tag{75}$$

führt .

Es handelt sich hierbei also um das Matrixelement einer reinen MØLLER-streuung an einem Teilchen der Ladung e und des anomalen magnetischen Momentes $F_2(0) = \mu_e$. Somit gelingt es auf diese Weise nicht , die durch das Auftreten von Formfaktoren bedingten Korrekturen zur reinen MØLLER-streuung sofort abzuspalten . Diese treten vielmehr zusammen mit den anderen , oben näher untersuchten Korrekturen in den durch Einschieben weiterer Zwischenzustände sich ergebenden Gliedern in (72) bzw. (73) auf . Die übrigen , in der Dispersionsrelation beitragenden Zwischenzustände führen zwar auf Matrixelemente reeller Photoprozesse , die im Prinzip leichter zu

behandeln sind , als die oben stets auftretenden virtuellen Photoprozesse . Dafür tritt aber auch der durch $\langle p'\sigma' | A^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ beschriebene niedrigste Einphoton-Prozeß hier nur für $k^2 = (p'-p)^2 = 0$,d.h. gewissermaßen als reeller Photoprozeß auf . Es ergibt sich also , wenigstens bei den hier behandelten Verfahren , die folgende Situation :

Tritt in der niedrigsten Näherung das Matrixelement $\langle p'\sigma' | A^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ für $k^2 = (p'-p)^2 = 0$ auf , so enthält auch die Korrektur hierzu die höheren Photoprozesse als reale Prozesse , d.h. mit $k^2 = 0$, während , wie bei unseren obigen Überlegungen , nach Abspaltung eines , das Matrixelement $\langle p'\sigma' | A^{\mu}(\omega) | p\sigma \rangle$ auch für Werte $k^2 = (p'-p)^2 = 0$ enthaltenden Termes $\langle p'\sigma'; q'\lambda' | T_1 | p\sigma; q\lambda \rangle$ der gesamte Korrekturterm $\langle q'\lambda'; p'\sigma' | T_2 | p\sigma; q\lambda \rangle$ durch virtuelle Einphoton-Prozesse bestimmt ist .

NEGATRON - POSITRON - PAARERZEUGUNG

Bei der konsequenten Formulierung des hier behandelten Verfahrens zur Trennung von Quantenelektrodynamik und starker Wechselwirkung (vgl. S. 24) wurde das Auftreten von Photonen bzw. von mehr als einem Elektron im Endzustand ausgeschlossen , das Verfahren wurde also zunächst auf eine reine Elektron-Nukleon-Streuung bzw. auf Elektroerzeugung von Pionen beschränkt . Bei der Diskussion von Mehr-Elektronen - bzw. Photonen-Zwischenzuständen trat dann aber bereits das Problem auf , wie bei Matrixelementen mit mehreren Elektronen bzw. Photonen die Quantenelektrodynamik dieser Teilchen sinnvoll von der starken Wechselwrikung der übrigen , beim Prozeß beteiligten Nukleonen und Mesonen zu trennen ist . Die gleiche Fragestellung tritt auf , wenn man eine Beschränkung auf reine Elektron-Nukleon-Streuung bzw. Pion-(Nukleon-Antinukleon)-Elektroerzeugung fallen läßt und auch Prozesse mit realen Photonen oder mehr als zwei Elektronen behandelt . Hier soll am Beispiel der Negatron-Positron-Paarerzeugung durch ein reales γ-Quant (im Feld eines Protons) die Erweiterung des obigen Verfahrens für solche Fälle behandelt werden .

Bei der Negatron-Positron-Paarerzeugung handelt es sich , im Sinne der am Anfang gegebenen Definition , um einen Elektroprozeß mit einem zusätzlichen Photon im Anfangszustand . Die Tatsache , daß hier statt des geforderten einen Elektrons jeweils im Anfangs- und im Endzustand ein Negatron-Positron-Paar im Endzustand auftritt , ist natürlich unwesentlich , da das Positron im Endzustand nach der Substitutionsregel , bzw. deren Verallgemeinerung , der Crossing-Symmetrie , einem Negatron im Anfangszustand entspricht . Statt der Negatron-Positron-Paarerzeugung hätte man ja auch ebensogut die , mit ihr über die Crossing-Symmetrie verknüpfte Bremsstrahlung behandeln können , auf die die am Anfang gegebene Definition exakt zutrifft . Alle hier erhaltenen Ergebnisse lassen sich daher auch sofort auf die Bremsstrahlung übertragen .

Reduziert man das T-Matrixelement der Paarerzeugung hinsichtlich

der beiden Elektronen , d. h. geht man genauso vor wie bei der Elektron-Nukleon-Streuung , so ergibt sich , analog zu (3) ,

$$\langle q s ; \bar{q} \bar{s} ; p'\sigma' | T | k\epsilon^{(\omega)}; p\sigma \rangle =$$

$$= -\int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' | \delta(x^0-y^0)\, \bar{u}_s(q) f_q^*(x) \gamma^0 [\psi_e(x), \bar{\psi}_e(y)]_+ v_{\bar{s}}(\bar{q}) f_{-\bar{q}}(y) | k\epsilon^{(\omega)}; p\sigma \rangle^{in} +$$

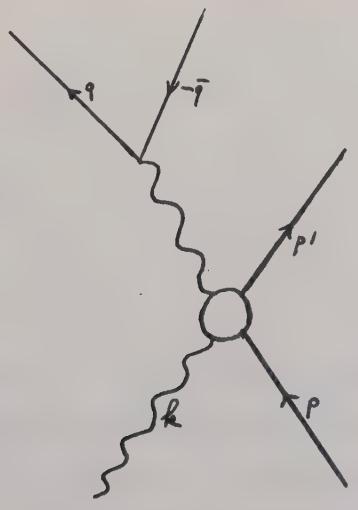
$$+ i \int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' | \bar{u}_s(q) f_q^*(x) \{ \Theta(x^0-y^0)\, \bar{\psi}_e(x) \bar{\psi}_e(y) - \Theta(y^0-x^0)\, \bar{\psi}_e(y) \bar{\psi}_e(x) \} v_{\bar{s}}(\bar{q}) f_{-\bar{q}}(y) | k\epsilon^{(\omega)}; p\sigma \rangle^{in} \qquad (76)$$

$$\underset{\text{def}}{=} \quad I + II$$

Unter Benützung von (6) , (7) und (8) folgt hieraus der dem ersten Summanden von (11) entsprechende Ausdruck

$$I = -2\pi e\, \delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\, (\bar{u}_s(q) \gamma_\mu v_{\bar{s}}(\bar{q})) \langle p'\sigma' | A^\mu(0) | k\epsilon^{(\omega)}; p\sigma \rangle^{in}. \qquad (77)$$

Nach der oben eingeführten Graphen-Konvention ist (77) also der Graph (Abb. 13) zuzuordnen . Abgesehen von dem unwesentlichen Auftreten eines auslaufenden Positrons , statt eines einlaufenden Negatrons , unterscheidet sich (77) wesentlich von dem Ausdruck (18) für $\langle q's'; p'\sigma' | T_1 | p\sigma; qs \rangle$ bei der Elektron-Nukleon-Streuung durch das Auftreten des einen realen Photons im Matrixelement $\langle p'\sigma' | A^\mu(0) | k\epsilon^{(\omega)}; p\sigma \rangle^{in}$ (vgl. hierzu auch Abb. 2 und Abb. 13) .



(Abb. 13)

Nach Reduktion hinsichtlich des realen Photons und unter Verwendung von

$$\Box A^{\mu}(x) = j^{\mu}(x)$$

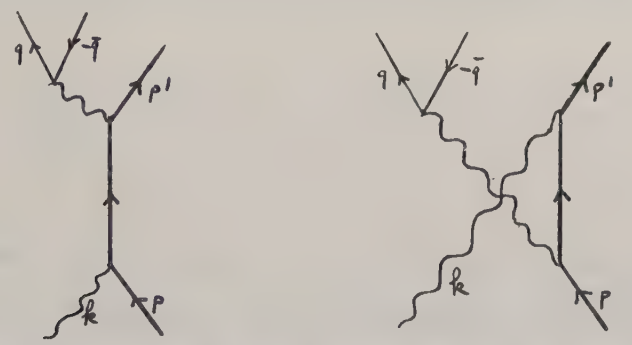
folgt schließlich (wenn man $[j^{\mu}(o)\ ,\ A^{\nu}(x)]\cdot\delta(x^{o}) = 0$ setzt)

$$I = -i\,2\pi e\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{s}(q)\gamma_{\mu}v_{s}(\bar{q}))\,\frac{1}{(p'-p-k)^{2}}\int d^{4}x\,e^{ikx}\,\langle p'\sigma'|T(j^{\mu}(o)\,j^{\nu}(x))|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)} \qquad (78)$$

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit der üblichen Störungsrechnung , mit Hilfe von (9) und (10) , ergibt hier in niedrigster Näherung , für ein als reines DIRACteilchen behandeltes Nukleon ,

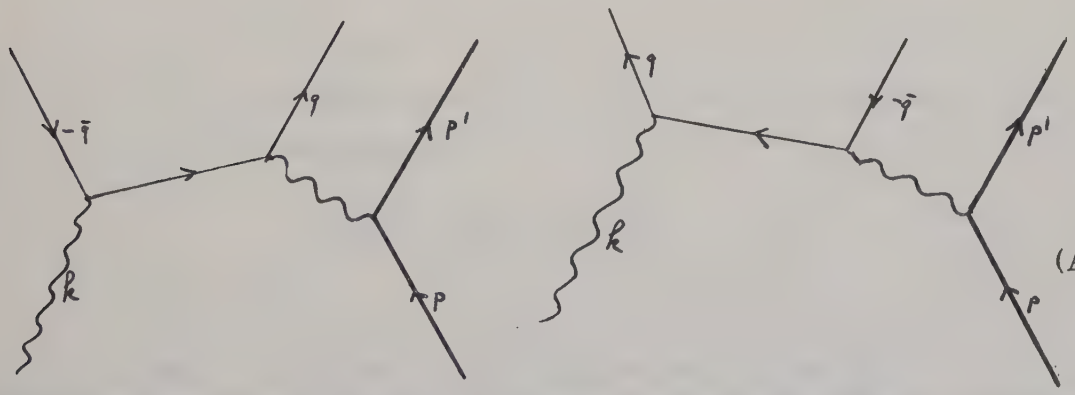
$$\tilde{I} = \frac{e^{3}}{(2\pi)^{4}i}\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{s}(q)\gamma_{\mu}v_{s}(\bar{q}))\,\frac{1}{(p'-p-k)^{2}}\,\bar{u}_{\sigma}(p')\left\{\gamma^{\mu}\tilde{S}_{F}(q+\bar{q})\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\tilde{S}_{F}(q+\bar{q})\gamma^{\mu}\right\}u_{s}(q)\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)} \qquad (79)$$

wobei dem Ausdruck (79) die FEYNMANgraphen



(Abb. 14)

entsprechen . Da es nach der Störungstheorie noch zwei weitere Graphen der Ordnung e^{3} zur Paarerzeugung gibt , nämlich (vgl. [26])



(Abb. 15)

wird man erwarten , daß in II Ausdrücke enthalten sind , die in niedrigster störungstheoretischer Näherung diesen Graphen entsprechen .
Es erscheint sinnvoll , diesen Anteil zuerst von II abzuspalten und dann den Rest, ähnlich wie bei der Elektron-Nukleon-Streuung als Korrektur anzusehen und weiterzubehandeln . Zu diesem Zweck hat man hinsichtlich des

im "in"-Zustand noch vorhandenen realen Photons zu reduzieren . Für die hier interessierende Fragestellung erweist sich von den verschiedenen möglichen Reduktionsformeln die folgende als besonders brauchbar

$$\underline{II} = i \int d^4x \int d^4y \, \langle p'\sigma' | \bar{u}_s(q) f_q^*(x) \{ T(\bar{\sigma}_e(x) \bar{\sigma}_e(y)) \} v_{\bar{s}}(\bar{q}) f_{-\bar{q}}(y) \, | \, k\epsilon^{(\lambda)}; p\sigma \rangle^{in}$$

$$= - \int d^4x \int d^4y \int d^4z \; \bar{u}_s(q) f_q^*(x) f_k(z) \Box_z \langle p'\sigma' | T(\bar{\sigma}_e(x) \bar{\sigma}_e(y) A^\nu(z)) | p\sigma \rangle v_{\bar{s}}(\bar{q}) f_{-\bar{q}}(y) \epsilon_\nu^{(\lambda)} \tag{80}$$

$$= \int d^4x \int d^4y \int d^4z \; \bar{u}_s(q) f_q^*(x) \langle p'\sigma' | \dot{T} \{ \bar{\sigma}_e(x) \bar{\sigma}_e(y) (\dot{f}(z) A^\nu(z) - f(z) \dot{A}^\nu(z)) \} | p\sigma \rangle v_{\bar{s}}(\bar{q}) f_{-\bar{q}}(y) \epsilon_\nu^{(\lambda)}$$

$$- \int d^4x \int d^4y \int d^4z \; \bar{u}_s(q) f_q^*(x) \langle p'\sigma' | T \{ \bar{\sigma}_e(x) \bar{\sigma}_e(y) j^\mu(z) \} | p\sigma \rangle v_{\bar{s}}(\bar{q}) f_{-\bar{q}}(y) \epsilon_\mu^{(\lambda)}$$

$$\underset{def}{=} \underline{II}_1 + \underline{II}_2 \; .$$

Hier ist $\dot{f}(z) = \frac{\partial}{\partial z^0} f(z)$ und $\dot{A}^\nu(z) = \frac{\partial}{\partial z^0} A^\nu(z)$. Ferner bedeutet $\dot{T}$ Bildung des zeitgeordneten Produktes und nachfolgende Differentiation der dabei auftretenden Θ -Funktionen nach z_o . Die Ableitung von (80) erfolgt nach den in der Reduktionstechnik üblichen Methoden (vgl. z.B. [17]) .

Zur Weiterbahandlung von II_1 hat man nun zusätzlich zu (6) , (7) und (8) die üblichen gleichzeitigen Vertauschungsrelationen für das Feld $A^\mu(x)$ zu fordern , d.h. es soll gelten

$$[A^\mu(\vec{x},t), \dot{A}^\nu(\vec{x}',t)] = 0 \tag{81a}$$

und

$$[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(x')] \delta(x^o - x^{o'}) = i \delta^{(4)}(x-x') g^{\mu\nu} \tag{81b}$$

Hiermit ergibt sich dann nach einigen Umformungen

$$\underline{\underline{II}}_1 = \int d^4x \int d^4y \int d^4z \; \bar{u}_s(q)\, f_q^*(x) \langle p'\sigma' | \hat{T}\{\bar{\sigma}_e(x)\bar{\sigma}_e(y)\,(\dot{\hat{\psi}}(z)A^\nu(z) - \hat{\psi}(z)\dot{A}^\nu(z))\}|p\sigma\rangle \cdot$$
$$\cdot\, v_s(\bar{q})\, f_{-\bar{q}}(y)\, \epsilon_\nu^{(\lambda)}$$

$$= ie \int d^4x \int d^4y \; \bar{u}_s(q)\, f_q^*(x)\, f_{-\bar{q}}(y) \langle p'\sigma' | T(\bar{\sigma}_e(x)\bar{\psi}_e(y))\gamma^\nu \psi_k(y) +$$
$$+ \gamma^\nu T(\psi_e(x)\bar{\sigma}_e(y))\psi_k(x)|p\sigma\rangle\, v_s(q)\, \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \quad (82)$$

$$= ie \int d^4x \int d^4y \; \bar{u}_s(q') \langle p'\sigma' | T(\bar{\sigma}_e(x)\bar{\psi}_e(y)\gamma^\nu f_q^*(x) f_{-\bar{q}}(y) +$$
$$+ \gamma^\nu T(\psi_e(y)\bar{\sigma}_e(x) f_q^*(y) f_{-\bar{q}}(x)|p\sigma\rangle \psi_k(y)\, v_s(q)\, \epsilon_\nu^{(\lambda)}.$$

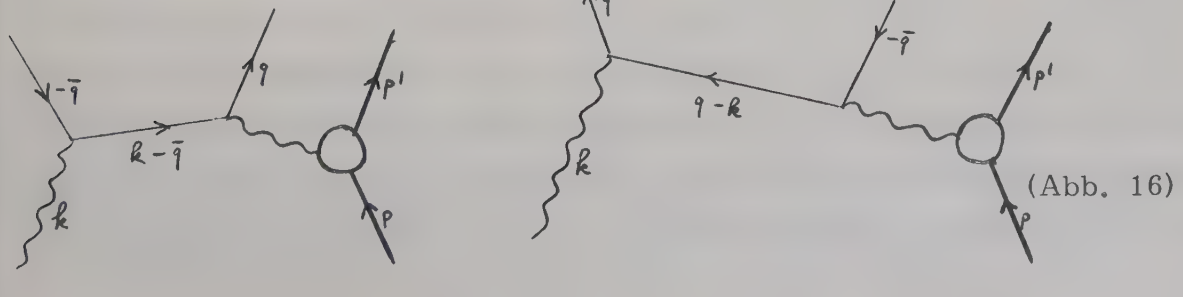
Beachtet man hier wiederum , daß

$$T(\bar{\sigma}_e(x)\bar{\psi}_e(y)) = \Theta(x^0-y^0)\, e A^\nu(x)\gamma_\nu \{\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)\Theta(x^0-y^0) - \bar{\psi}_e(y)\psi_e(x)\Theta(y^0-x^0)\}$$
$$+ \Theta(y^0-x^0)\{\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)\Theta(x^0-y^0) - \bar{\psi}_e(y)\psi_e(x)\Theta(y^0-x^0)\}\gamma_\nu e A^\nu(x) \quad (83)$$

ist , so ergibt sich nach Ersetzen von $\psi_e(x)$ durch $\psi_e^{in}(x)$ in niedrigster Näherung hinsichtlich e

$$\underline{\underline{II}}_1 = -\frac{e^2}{(2\pi)^{3/2}} \delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\, \bar{u}_s(q)\{\gamma_\nu \tilde{S}_F(k-\bar{q})\gamma_\mu + \gamma_\mu \tilde{S}_F(q-k)\gamma_\nu\} v_{\bar{s}}(\bar{q})\epsilon_\mu^{(\lambda)} \cdot$$
$$\cdot \langle p'\sigma' | A^\nu(0) | p\sigma\rangle$$
$$= \frac{e^2}{(2\pi)^{3/2}} \delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\, \bar{u}_s(q)\{\gamma_\nu \tilde{S}_F(k-\bar{q})\gamma_\mu + \gamma_\mu \tilde{S}_F(q-k)\gamma_\nu\} v_{\bar{s}}(\bar{q})\epsilon_\mu^{(\lambda)} \cdot \quad (84)$$
$$\cdot \frac{1}{\Delta^2}\, \bar{u}_{\sigma'}(p')\left(\gamma^\nu F_1(\Delta^2) + i\sigma^{\nu\varrho}\Delta_\varrho F_2(\Delta^2)\right) u_\sigma(p),$$

d. h. ein den Graphen



(Abb. 16)

entsprechender Ausdruck .

Da II_2 von höherer Ordnung in e ist , als I und II_1, beim Übergang zur Störungsrechnung , ist es somit gelungen den gesamten , die e^3-Näherung der Störungsrechnung enthaltenden Anteil des T-Matrixelementes der Negatron-Positron-Paarerzeugung abzuspalten . Man wird also , ähnlich wie bei der Elektron-Nukleon-Streuung den verbleibenden Rest II_2 als Korrektur zu I und II_1 auffassen können . Diese Korrektur kann dann im Prinzip nach den oben angegebenen Methoden , nach Einschieben von Zwischenzuständen , weiterbehandelt werden .

Die Abspaltung der niedrigsten Näherung in e wurde hier in zwei Schritten durchgeführt . Es wurde erst der Anteil I und dann anschließend der , im verbleibenden Teil II enthaltene Beitrag II_1 zur gleichen Ordnung in e abgetrennt . Wesentlich war hierbei , daß erst hinsichtlich der beiden Elektronen reduziert wurde und dann erst , in den erhaltenen Ausdrücken , hinsichtlich des Photons . Diese Vorgehen war nahegelegt durch die bei der Elektron-Nukleon-Streuung durchgeführten Überlegungen , ist aber keineswegs zwingend . Z.B. erhält man bei Reduktion eines Elektrons und eines Photons jeweils einen Summanden der letzten Zeile von (82) im gleichzeitigen Kommutator , während der verbleibende andere Summand von (82) und der Ausdruck (78) im zeitgeordneten Produkt enthalten ist . Am systematischsten ist ein Vorgehen , bei dem man erst hinsichtlich beider Elektronen und hinsichtlich des Photons symmetrisch reduziert (vgl. hierzu etwa Formel (V, 21) in [17] für den Bosonen-Fall) . Faßt man dann die Ausdrücke mit jeweils einer zeitlichen δ -Funktion zusammen , so ergeben sich die obigen Glieder I und II_1 . Es verbleibt als Rest das Glied II_2 mit den zeitgeordneten Produkten der Ströme $\sigma_e(x)$ und $j^r(x)$. Das systematischere Verfahren ist insbesondere im allgemeinen geeigneter , wenn man beliebige Elektroprozesse mit mehreren Elektronen und Photonen untersuchen will . Das hier durchgeführte schrittweise Vorgehen ist aber etwas übersichtlicher und hat den Vorteil , daß es die auftretenden Unterschiede gegenüber der Elektron-Nukleon-Streuung deutlicher erkennen läßt . Dort war der den Term $\langle q_s' ; p' \sigma' | T_1 | p_s ; q_s \rangle$ ergebende gleichzeitige Kommutator sofort auf die Formfaktoren zurückführbar . Bei

der Paarerzeugung ist es nun zwar auch gelungen die Terme I und II_1, die hier gewissermaßen anstelle des Ausdruckes $\langle q'\lambda';p'\sigma'|T_1|p\sigma;q\lambda\rangle$ stehen, d.h. die niedrigste Näherung der Störungsrechnung enthalten, in sinnvoller Weise abzuspalten, aber diese Ausdrücke sind selbst noch von komplizierterer Struktur und sind daher weiterzubehandeln.

Für II_1 ergab sich bereits durch Ersetzen von $\psi_e(x)$ durch $\psi_e^{(0)}(x)$, d.h. in niedrigster Näherung hinsichtlich einer Entwicklung des Elektronenfeldes nach Potenzen von e, das Ergebnis (84). Die hierbei vernachlässigten Korrekturen sind in erster Linie die Strahlungskorrekturen am Elektron, die weitgehend unabhängig von den hier untersuchten Problemen behandelt werden können. Somit ist also II_1 durch (84) im wesentlichen auf Ausdrücke, die als unbekannte Funktionen nur die Formfaktoren enthalten, zurückgeführt.

Schwieriger zu behandeln ist dagegen I. Zunächst legt der Vergleich mit der Störungsrechnung (79) die Vermutung nahe, daß I, obwohl von gleicher Größenordnung in e wie II_1, nur eine Korrektur zu II_1 darstellt, da die den Graphen (Abb. 14) entsprechenden Wirkungsquerschnitte aus kinematischen Gründen nur einen geringen Beitrag zu den aus den Graphen (Abb. 15) berechneten ergeben (vgl. [4]).

Zu einer näheren Untersuchung von I betrachten wir die aus (78) folgende Gleichung

$$I = -2\pi e\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_s(q)\,\gamma_\mu\,v_{\bar{s}}(\bar{q})\,\frac{(2\pi)^{3/2}}{(p'-p-k)^2}\cdot\Big\{$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}+\vec{k}}^{n}\frac{\langle p'\sigma'|\,j^\mu(0)\,|n\rangle\langle n|\,j^\nu(0)\,|p\sigma\rangle}{p_n^0-p^0-k^0-i\varepsilon}+ \tag{85}$$

$$+\sum_{\vec{p}_n=\vec{p}'-\vec{k}}^{n}\frac{\langle p'\sigma'|\,j^\nu(0)\,|n\rangle\langle n|\,j^\mu(0)\,|p\sigma\rangle}{p_n^0+k^0-p'^0-i\varepsilon}\Big\}\,\epsilon_\nu^{(\lambda)}\,.$$

Dieser der Beziehung (43) ähnliche Ausdruck führt also nach den gleichen Überlegungen wie bei der Elektron-Nukleon-Streuung den gesamten Term I auf Matrixelemente virtueller Photoprozesse zurück.

Hier soll als niedrigste Näherung der Beitrag des 1 Nukleon-Zwischenzustandes angegeben werden . Es ergibt sich

$$I_1 = -2\pi e\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{s_1}(q)\,\gamma_\mu\,v_{\bar{s}}(\bar{q}))\,\frac{(2\pi)^{3/2}}{(p'-p-k)^2}\Big\{ \tag{86a}$$

$$\cdot\Big\{ \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^0}\sum_{\sigma_1=1}^{2}\delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}-\vec{k})\,\frac{\langle p'\sigma'|\,j^\mu(0)\,|p_1\sigma_1\rangle\langle p_1\sigma_1|\,j^\nu(0)\,|p\sigma\rangle}{p_1^0-p^0-k^0-i\varepsilon} +$$

$$+\int \frac{d^3\vec{p}_1}{2p_1^0}\sum_{\sigma_1=1}^{2}\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{k}-\vec{p}')\,\frac{\langle p'\sigma'|\,j^\nu(0)\,|p_1\sigma_1\rangle\langle p_1\sigma_1|\,j^\mu(0)\,|p\sigma\rangle}{p_1^0+k^0-p'^0-i\varepsilon}\Big\}\,\epsilon_\nu^{(\lambda)},$$

also mit $E(p) = \sqrt{\vec{p}^2+M^2}$

$$I_1 = -2\pi e\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{s_1}(q)\,\gamma_\mu\,v_{\bar{s}}(\bar{q}))\,\frac{(2\pi)^{3/2}}{(p'-p-k)^2}\cdot\Big\{$$

$$\cdot\Big\{ \sum_{\sigma_1=1}^{2}\frac{\langle p'\sigma'|\,j^\mu(0)\,|(\vec{k}+\vec{p}),E(\vec{k}+\vec{p}),\sigma_1\rangle\langle(\vec{k}+\vec{p}),E(\vec{k}+\vec{p}),\sigma_1|\,j^\nu(0)\,|p\sigma\rangle}{2E(\vec{k}+\vec{p})\cdot\{E(\vec{k}+\vec{p})-p^0-k^0\}} + \tag{86b}$$

$$+\sum_{\sigma_1=1}^{2}\frac{\langle p'\sigma'|\,j^\nu(0)\,|(\vec{p}'-\vec{k}),E(\vec{p}'-\vec{k}),\sigma_1\rangle\langle\vec{p}'-\vec{k},E(\vec{p}'-\vec{k}),\sigma_1|\,j^\mu(0)\,|p\sigma\rangle}{2E(\vec{p}'-\vec{k})\cdot\{E(\vec{p}'-\vec{k})+k^0-p'^0\}}\Big\}\,\epsilon_\nu^{(\lambda)}$$

In (86) kann man , analog zu (38) die Summen über σ_1 ausführen und erhält Ausdrücke , in denen als unbekannte Funktionen nur die Formfaktoren auftreten , die etwa aus den phänomenologischen Ausdrücken (62) entnommen werden können . Dadurch ist I_1 vollständig bestimmt , so daß der Einfluß dieser Näherung auf den Wirkungsquerschnitt in üblicher Weise berechnet werden kann (vgl. dazu [4]) .

Niederenergietheorem

Wie oben schon erwähnt , läßt ein Vergleich der , den Ausdrücken II_1 und I in niedrigster störungstheoretischer Näherung entsprechenden Matrixelemente (84) und (79) , nach Quadrieren und Ausführen der üblichen Spinsummationen , erkennen , daß der Hauptbeitrag zur Ordnung e^3 , der störungstheoretischen Berechnung der Paarerzeugung , durch II_1 geliefert wird ,

während I nur einen Korrekturterm hierzu darstellt . Man wird also vermuten , daß auch im allgemeinen , wenigstens für nicht zu hohe Energien , I nur eine Korrektur zu II_1 ist . Im Prinzip ließe sich I nach (85) berechnen , wenn alle darin auftretenden Matrixelemente bekannt wären , und damit diese Frage untersuchen . Insbesondere kann man für nicht zu hohe Energien (vgl. unten) statt (85) den Ausdruck (86) , der mit den Formfaktoren vollständig gegeben ist , benutzen und damit den Einfluß von I berechnen . Zu wesentlich einfacheren und übersichtlicheren Ergebnissen gelangt man durch konsequente Niederenergienäherung , in die keinerlei störungstheoretische Argumente eingehen , und an der sich doch das Prinzipielle der obigen Behauptung deutlich erkennen läßt .

Hierzu sind zunächst einige einfache kinematische Überlegungen nützlich . Die Erzeugungsschwelle für das Negatron-Positron-Paar liegt im Laborsystem bei der Photonenergie

$$k^0 = 2m_e \left(1 + \frac{m_e}{M}\right) \approx 2m_e \tag{87}$$

Als Niederenergiebereich betrachten wir

$$2m_e < k^0 \ll m_\pi < M \tag{88}$$

(m_π = Pion-Masse , M = Nukleon-Masse) . Somit ist im Laborsystem wegen $p^{0'} - p^0 = k^0 - (q^0 + \bar{q}^0) \geq 0$

$$q^0 + \bar{q}^0 \leq k^0 \ll m_\pi < M$$

also $|\vec{q}|$ und $|\vec{\bar{q}}| \ll m_\pi < M$ und daher wegen $|\vec{p}' - \vec{p}| = |\vec{p}'| \leq |\vec{k}| + |\vec{q}| + |\vec{\bar{q}}|$

$$|\vec{p}' - \vec{p}| \ll M \tag{89}$$

Im Schwerpunktsystem liegt die Erzeugungsschwelle bei

$$k^0 = 2m_e \left(1 - \frac{m_e}{M + 2m_e}\right) \approx 2m_e \left(1 - \frac{m_e}{M}\right) \approx 2m_e .$$

Der obige Niederenergiebereich entspricht dort dem Bereich

$$2m_e < k^0 \ll \frac{1}{\sqrt{3}} M$$

und es ergibt sich , nach ähnlichen Überlegungen wie oben , wiederum $|\vec{p}'| \ll M$, also wegen der im Schwerpunktsystem gültigen Beziehung $|\vec{p}| = |\vec{k}| = k^0 \ll M$ ebenfalls $|\vec{p}' - \vec{p}| \ll M$.

Hieraus folgt aber

$$|p^{0\prime} - p^0| \approx ||\vec{p}'| - |\vec{p}|| \cdot \frac{|\vec{p}'| + |\vec{p}|}{2p^0} \leq |\vec{p}' - \vec{p}| \frac{|\vec{p}'| + |\vec{p}|}{2M} \ll |\vec{p}' - \vec{p}|,$$

also schließlich

$$\Delta^2 = (p' - p)^2 \approx -(\vec{p}' - \vec{p})^2, \tag{90}$$

wobei Glieder der Größenordnung $\frac{|\vec{p}'| + |\vec{p}|}{M}$ vernachlässigt wurden.

In dem hier betrachteten Energiebereich soll zunächst $\widetilde{\Pi}_1$ näherungsmäßig behandelt werden. Führt man in den in (84) auftretenden Ausdrücken

$$\langle p'\sigma' | j^\mu(0) | p\sigma \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \bar{u}_{\sigma'}(p') \left\{ F_1(\Delta^2) \gamma^\mu + F_2(\Delta^2) i\sigma^{\mu\nu}\Delta_\nu \right\} u_\sigma(p) \tag{91}$$

eine FOLDY-WOUTHUYSEN-Transformation aus, mit

$$e^{iS(p)} = \sqrt{\frac{2p^0}{p^0 + M}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + M}{p^0} + 1 \right) \approx 1 + \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{2M} \tag{92}$$

(für $|\vec{p}| \ll M$)

wobei

$$e^{iS(p)} u_1(p) = \sqrt{2M}\, \chi_+ \longrightarrow \sqrt{2M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{93a}$$

und

$$e^{iS(p)} u_2(p) = \sqrt{2M}\, \chi_- \longrightarrow \sqrt{2M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{93b}$$

gilt, so ergibt sich unter Benutzung von

$$\langle p'\sigma' | j^0(0) | p\sigma \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} u^+_{\sigma'}(p') \left(F_1(\Delta^2) + \vec{\gamma}\cdot\vec{\Delta}\, F_2(\Delta^2) \right) u_\sigma(p) \tag{94}$$

nach einigen Zwischenrechnungen (vgl. hierzu auch [9])

$$\langle p'\sigma' | j^0(0) | p\sigma \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} 2M \chi_{\sigma'} \left\{ F_1(\Delta^2) + \frac{1}{2M} \left(\vec{\Delta}^2 + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}' \times \vec{p}) \right) F_2(\Delta^2) \right\} \chi_\sigma . \tag{95}$$

Für $\Delta^2 = 0$ ist $F_1(0) = e$ und $F_2(0)$ hat die Größenordnung e/M, d.h. $\frac{1}{2M}\left(\vec{\Delta}^2 + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}'\times\vec{p})\right) F_2(0)$ hat die Größenordnung $\frac{|\vec{p}'| + |\vec{p}|}{M} e$, d.h. bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\frac{|\vec{p}'| + |\vec{p}|}{M} \ll 1$ in einer Entwicklung nach Potenzen von $\frac{|\vec{p}'| + |\vec{p}|}{M}$ gilt

$$\langle p'\sigma' | j^0(0) | p\sigma \rangle = \frac{2M}{(2\pi)^3} F_1(\Delta^2)\, \delta_{\sigma'\sigma} . \tag{96}$$

Analog ergibt sich

$$\langle p'\sigma'|\,\vec{j}(0)\,|p\sigma\rangle = \frac{2M}{(2\pi)^3}\chi_{\sigma'}\left\{\frac{F_1(\Delta^2)}{2M}(\vec{p}+\vec{p}') + i\left(\frac{F_1(\Delta^2)}{2M}+F_2(\Delta^2)\right)(\vec{\sigma}\times\vec{\Delta})\right\}\chi_\sigma$$

$$= \frac{2M}{(2\pi)^3}\chi_{\sigma'}\left\{F_1(\Delta^2)\frac{\vec{p}+\vec{p}'}{2M} + i\mu(\Delta^2)(\vec{\sigma}\times\vec{\Delta})\right\}\chi_\sigma \qquad (97)$$

mit dem für $\Delta^2 = 0$ in das gesamte magnetische Moment des Protons übergehenden Ausdruck $\mu(\Delta^2) = \left(\frac{F_1(\Delta^2)}{2M} + F_2(\Delta^2)\right)$.
Hiermit kann man also in (84) eingehen. Insbesondere erhält man in niedrigster Näherung, wenn man nur (94) berücksichtigt, d.h. auch Glieder der Größenordnung $\frac{|\vec{p}|+|\vec{p}'|}{M}$ vernachlässigt,

$$\mathrm{II}_1 \approx \frac{-e^2}{(2\pi)^{3/2}}\delta(p'+q+\bar{q}-p-k)\left\{\bar{u}_{s_1}(q')\gamma^0\tilde{S}_F(k-\bar{q})\gamma^\nu v_{s_2}(\bar{q}) + \bar{u}_{s_1}(q')\gamma^\nu\tilde{S}_F(q-k)\gamma^0 v_{s_2}(\bar{q})\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(\vec{p}'-\vec{p})^2}\epsilon_\nu^{(\lambda)}\,2M\,F_1(\Delta^2\to 0)\,\delta_{\sigma'\sigma}\,, \qquad (98)$$

d.h. den aus der Störungsrechnung für Paarerzeugung in einem äußeren elektrischen Feld der Ladung $F_1(\Delta^2\to 0)\to e$ sich ergebenden Ausdruck, dem die FEYNMANgraphen

(Abb. 17)

zugeordnet sind.

In entsprechender Weise kann man nun die Niederenergienäherung von I bestimmen. Ausgangspunkt hierfür ist der Ausdruck (85). Da die Photonenergie unterhalb der Schwelle für Pion-Erzeugungsprozesse angenommen wurde, kann man hier also (86) benutzen, d.h. den durch Einschieben eines 1-Nukleon-Zwischenzustandes aus (85) entstandenen Ausdruck. Hier lassen sich wegen (88) bis (90) zunächst die Nenner vereinfachen. Es gilt

$$I_1 \approx 2\pi e\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{\sigma_1}(q)\,\gamma_\mu\,v_{\bar{\sigma}}(\bar{q}))\,\frac{(2\pi)^{3/2}}{(p'-p-k)^2}\cdot$$

$$\frac{1}{2Mk^0}\Big\{\sum_{\sigma_1}\langle p'\sigma'|\,j^\mu(0)\,|\vec{k}+\vec{p},\ E(\vec{k}+\vec{p}),\sigma_1\rangle\langle\vec{k}+\vec{p},E(\vec{k}+\vec{p}),\sigma_1|j^\nu(0)|p\sigma\rangle - \tag{99}$$

$$-\sum_{\sigma_1}\langle p'\sigma'|\,j^\nu(0)\,|\vec{p}'-\vec{k},\ E(\vec{p}'-\vec{k}),\sigma_1\rangle\langle\vec{p}'-\vec{k},E(\vec{p}'-k),\sigma_1|j^\mu(0)|p\sigma\rangle\Big\}\,\epsilon_\nu^{(\lambda)}.$$

Unter Verwendung von (95) bis (97) folgt dann ein relativ langer Ausdruck, der hier nicht wiedergegeben werden soll. Berücksichtigt man hierbei jeweils nur die größten Glieder, hinsichtlich ihrer Ordnung in $\frac{|\vec{p}'|+|\vec{p}|}{M}$, wie es ja auch bereits bei der Herleitung von (98) geschah, so erhält man

$$I_1 \approx -2\pi e\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{\sigma_1}(q)\,\gamma_0\,v_{\bar{\sigma}}(\bar{q}))\,\frac{(2\pi)^{3/2}}{(p'-p-k)^2}\Big\{$$

$$\cdot\Big\{\frac{1}{2p^0k^0}\sum_{\sigma_1}\frac{2M}{(2\pi)^3}F_1(0)\,\delta_{\sigma'\sigma_1}\frac{2M}{(2\pi)^3}\chi_{\sigma_1}\Big[\frac{F_1(-\vec{k}^2)}{2M}(\vec{k}+2\vec{p})+i\mu(-\vec{k}^2)\,(\vec{\sigma}\times\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}\Big]\chi_\sigma \tag{100}$$

$$-\frac{1}{2p'^0k^0}\sum_{\sigma_1}\frac{2M}{(2\pi)^3}\chi_{\sigma'}\Big[\frac{F_1(-\vec{k}^2)}{2M}\,(2\vec{p}'-\vec{k})+i\mu(-\vec{k}^2)\,(\vec{\sigma}\times\vec{k})\Big]\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}\chi_{\sigma_1}\frac{2M}{(2\pi)^3}F_1(0)\,\delta_{\sigma_1\sigma}\Big\}.$$

Es folgt dann schließlich nach Einsetzen von $F_1(\Delta^2=0)=e$ unter Beachtung von $\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}=0$

$$I_1 \approx -\frac{e^2}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,\frac{1}{k^0}(\bar{u}_{\sigma_1}(q)\,\gamma^\mu v_{\bar{\sigma}}(\bar{q}))\,\frac{2M}{(p'-p-k)^2}\cdot\frac{(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{\epsilon}^{(\lambda)}}{M}\quad. \tag{101}$$

Hier tritt also im Gegensatz zu $\widetilde{II}_1$ wieder ein zusätzlicher Faktor der Größenordnung $\frac{|\vec{p}'-\vec{p}|}{M}$ auf, der bewirkt, daß I_1 wenigstens im hier betrachteten Energiebereich nur eine Korrektur zu II_1 darstellt. Genaugenommen müßte man natürlich wiederum in üblicher Weise $I_1+\widetilde{II}_1$ quadrieren und alle Spinsummationen ausführen. Es zeigt sich dann aber ebenfalls (vgl. die Rechnungen in [4]) das Auftreten von Faktoren der Größenordnung $\frac{|\vec{p}'-\vec{p}|}{M}$ bzw. $\frac{|\vec{p}'-\vec{p}|^2}{M^2}$ in den von I_1 herrührenden Termen, gegenüber dem nur durch $\widetilde{II}_1$ bestimmten Summanden, der somit den Hauptbeitrag liefert.

Abschließend läßt sich also feststellen, daß es durch die obige Reduktion des T-Matrixelementes für die Negatron-Positron-Paarerzeugung gelungen ist,

zwei Summanden I und II_1 abzuspalten, die in niedrigster störungstheoretischer Näherung den Graphen der Ordnung e^3 entsprechen. Mit den beiden Gliedern I und II_1 ist gleichzeitig eine Zerlegung des abgespaltenen Anteiles $(I + II_1)$ in zwei Ausdrücke gelungen, von denen der eine (I) die Wirkung des realen Photons direkt mit dem Proton, der andere indirekt, über ein von den Elektronen erzeugtes virtuelles Photon, enthält. Im Niederenergiebereich ist hierbei, aus den oben diskutierten Gründen, der Summand I, mit dem direkt am Proton angreifenden Photon nur eine Korrektur gegenüber dem Glied II_1, das die Wechselwirkung des Photons mit dem erzeugten Negatron-Positron-Paar enthält. Im Hochenergiebereich kann I mit Hilfe von (85) weiter untersucht werden, indem man, wie in den (85) ähnlichen Ausdruck (43), die Matrixelemente der virtuellen EinphotonProzesse einsetzt (vgl. hierzu die Diskussion im Abschnitt "Matrixelemente der Einphoton-Prozesse").

Dispersionsrelation

Den in (85) enthaltenen Ausdruck

$$\left\{ \sum_{\vec{k}=\vec{p}+\vec{k}} \frac{\langle p's' | j^\mu(0) | n \rangle \langle n | j^\nu(0) | ps \rangle}{p_n^\circ - p^\circ - k^\circ - i\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\vec{k}=\vec{p}'-\vec{k}} \frac{\langle p's' | j^\nu(0) | n \rangle \langle n | j^\mu(0) | ps \rangle}{p_n^\circ + k^\circ - p'^\circ - i\varepsilon} \right\} \epsilon_\nu^{(\lambda)} \underset{def}{=} T(p', k'; p, k) \qquad (102)$$

mit $k' \underset{def}{=} p + k - p'$ kann man bis auf unwesentliche konstante Faktoren auffassen, als die Fortsetzung der Streuamplitude des COMPTONeffektes zu Werten k' hin, für die im allgemeinen nicht mehr $k'^2 = 0$ gilt. Es handelt sich hier also um einen COMPTONeffekt" mit einlaufendem realen und auslaufendem virtuellen Photon. Nimmt man für T(p', k'; p, k) eine Dispersionsrelation in $s = (p + k)^2$, entsprechend der Dispersionsrelation beim realen COMPTONeffekt (vgl. [27] und [28]), an, so lassen sich hierfür die Imaginärteile in üblicher Weise mit Hilfe von (102) aus

$$\frac{i}{2}\left\{T^{*}(p,k;p',k') - T(p',k';p,k)\right\} = \tag{103}$$

$$= \pi \sum_{n} \delta^{(4)}(p_n - p - k)\,\langle p'\sigma'|\, j^{\mu}(0)\,|n\rangle\langle n|\, j^{\nu}(0)\,|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)} +$$

$$+ \pi \sum_{n} \delta^{(4)}(p_n + k - p')\,\langle p'\sigma'|\, j^{\nu}(0)\,|n\rangle\langle n|\, j^{\mu}(0)\,|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}$$

bestimmen . Interessant ist hier der Beitrag des 1 Proton-Zwischenzustandes . Es ergibt sich (vgl. [25]) :

$$\frac{i}{2}\left\{T^{*}(p,k;p',k') - T(p',k';p,k)\right\}_{1} = \pi\,\delta(s-M^2)\sum_{\sigma_1=1}^{2}\langle p'\sigma'|\, j^{\mu}(0)\,|k+p,\sigma_1\rangle\langle k+p,\sigma_1|\, j^{\nu}(0)\,|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)} + \tag{104}$$

$$+ \pi\,\delta(u-M^2)\sum_{\sigma_1=1}^{2}\langle p'\sigma'|\, j^{\nu}(0)\,|p'-k,\sigma_1\rangle\langle p'-k,\sigma_1|\, j^{\mu}(0)\,|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}$$

mit den CHEWschen Variablen $s = (p+k)^2$ und $u = (p' - k)^2$. Nach Einsetzen in die angenommene Dispersionsrelation folgt als Beitrag der Ein-Teilchen-Singularität

$$T_1(p',k';p,k) = -\frac{\sum_{\sigma_1=1}^{2}\langle p'\sigma'|\, j^{\mu}(0)\,|p+k,\sigma_1\rangle\langle p+k,\sigma_1|\, j^{\nu}(0)\,|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}}{(p+k)^2 - M^2} - \tag{105}$$

$$- \frac{\sum_{\sigma_1=1}^{2}\langle p'\sigma'|\, j^{\nu}(0)\,|p'-k,\sigma_1\rangle\langle p'-k,\sigma_1|\, j^{\mu}(0)\,|p\sigma\rangle\,\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}}{(p'-k)^2 - M^2} \quad .$$

Setzt man diesen Ausdruck in (85) ein , so erhält man schließlich , unter Benützung von (38) ,

$$I' = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{\sigma}(q)\,\gamma_{\mu}\,v_{\bar{\sigma}}(\bar{q}))\,\frac{\epsilon_{\nu}^{(\lambda)}}{(p'-p-k)^2}\cdot\Big\{$$

$$\cdot\Big\{\bar{u}_{\sigma'}(p')\Big[\gamma^{\mu}F_1((p'-p-k)^2) + i\sigma^{\mu\varrho}(p'-p-k)_{\varrho}\,F_2((p'-p-k)^2)\Big]\frac{\gamma^{\lambda}(p+k)_{\lambda} - M}{(p+k)^2 - M^2}\Big[\gamma^{\nu}F_1(k^2) + i\sigma^{\nu\eta}k_{\eta}F_2(k^2)\Big]u_{\sigma}(p)$$

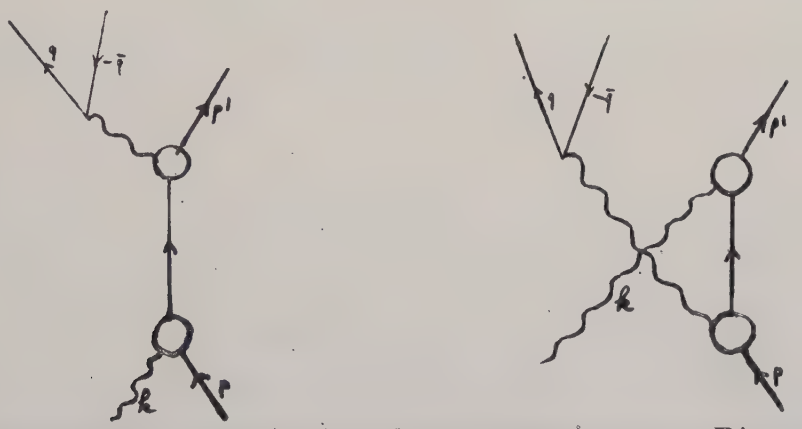
$$+ \bar{u}_{\sigma'}(p')\Big[\gamma^{\nu}F_1(k^2) + i\sigma^{\nu\eta}k_{\eta}F_2(k^2)\Big]\frac{\gamma^{\lambda}(p'-k)_{\lambda} - M}{(p'-k)^2 - M^2}\Big[\gamma^{\mu}F_1((p'-p-k)^2) + i\sigma^{\mu\varrho}(p'-p-k)_{\varrho}\,F_2((p'-p-k)^2)\Big]u_{\sigma}(p)\Big\} =$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \delta(q+\bar{q}+p'-p-k)\,(\bar{u}_{s'}(p')\,\gamma_\mu\,u_s(p))\frac{\epsilon_\nu^{(2)}}{(p'-p-k)^2}\cdot\Big\{$$

$$\cdot\Big\{\bar{u}_{\sigma'}(p')\left[\gamma^\mu F_1((q+\bar{q})^2) - i\sigma^{\mu\varrho}(q+\bar{q})_\varrho\, F_2((q+\bar{q})^2)\right]\widetilde{S}_F(p+k)\left[\gamma^\nu F_1(0) + i\sigma^{\nu\eta}k_\eta F_2(0)\right]u_\sigma(p) + \tag{106}$$

$$+\bar{u}_{\sigma'}(p')\left[\gamma^\nu F_1(0) + i\sigma^{\nu\eta}k_\eta F_2(0)\right]\widetilde{S}_F(p'-k)\left[\gamma^\mu F_1((q+\bar{q})^2) - i\sigma^{\mu\varrho}(q+\bar{q})_\varrho\, F_2((q+\bar{q})^2)\right]u_\sigma(p)\Big\}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (79), so zeigt sich, daß (106) aus (79) hervorgeht, wenn man dort die an jedem Photon-Proton-Vertex der Graphen der (Abb. 14) auftretenden γ^μ durch die entsprechenden Ausdrücke $\{F_1(\Delta^2)\gamma^\mu + i\sigma^{\mu\nu}\Delta_\nu F_2(\Delta^2)\}$ ersetzt, was vom Standpunkt der Störungsrechnung aus einer Aufsummation aller Vertexparts entspricht, d.h. der Ersetzung der Graphen der (Abb. 14) durch FEYNMANgraphen der Form



(Abb. 18)

Ein strenger Beweis der oben angenommenen Dispersionsrelationen würde also eine exakte Begründung der üblicherweise (vgl. [4]) aus der Störungstheorie gefolgerten Ersetzung von (79) durch (106) zur Folge haben.

Bemerkenswert erscheint an (106) vor allem die Tatsache, daß wegen $(q+\bar{q})^2 \geq (2m_e)^2$ die Formfaktoren $F_i(\Delta^2) = F_i((q+\bar{q})^2)$ hier für positive Werte der Variablen Δ^2 auftreten, also für Werte des nichtphysikalischen Bereiches von Δ^2 bei der Elektron-Nukleon-Streuung. In diesem Bereich liegt auch die durch die Pion-Pion-Resonanz bewirkte Resonanz des Formfaktors (vgl. die Formeln (62), die allerdings nur in größerer Entfernung von der Resonanz gültig sind). Das Auftreten der Formfaktoren im nichtphysikalischen Bereich der Elektron-Nukleon-Streuung ist charakteristisch für die Paarerzeu-

gung . Betrachtet man nämlich die Bremsstrahlung , d.h. den der Paarerzeugung durch die Crossing-Symmetrie zugeordneten Prozeß , so tritt wegen der Ersetzung von q durch q' und von $\bar{q}$ durch $(-q)$ in den Formfaktoren die Variable $(q' - q)^2$ statt $(q + \bar{q})^2$ auf , deren Wertebereich unterhalb Null liegt .

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde in dieser Arbeit die Möglichkeit untersucht , bei Prozessen , die als wechselwirkende Teilchen Elektronen , Photonen , Nukleonen und Pionen enthalten , im Rahmen einer allgemeinen axiomatischen Feldtheorie in sinnvoller Weise die gut bestätigten Ergebnisse der Quantenelektrodynamik so zu berücksichtigen , daß alle auftretenden Ausdrücke als unbekannte Funktionen nur noch die Matrixelemente der Photoerzeugung durch ein virtuelles Photon , bzw. die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons , d.h. die Wechselwrikung eines virtuellen Photons mit den jeweils beteiligten stark wechselwirkenden Teilchen enthalten . Ziel war es also in den Ergebnissen als unbekannte Größen nur solche Ausdrücke zu erhalten , die prinzipiell aus einer Theorie der starken Wechselwirkung , z.B. mit Hilfe von Dispersionsrelationen , zu bestimmen sind , so daß eine vollständige Abspaltung der durch die Quantenelektrodynamik beschriebenen Wechselwirkung des Elektron-Photon-Feldes von der Wechselwirkung des Photon-Feldes mit dem Pion-Nukleon-Komplex erfolgt .

Es wurde hierzu zunächst für die Elektron-Nukleon-Streuung , dann in unmittelbar sich ergebender Erweiterung für Erzeugungsprozesse von Pionen durch virtuelle Photonen , ein Verfahren angegeben , das im wesentlichen auf einer Zurückführung des T-Matrixelementes des jeweiligen Prozesses auf Ausdrücke mit gleichzeitigen Kommutatoren beruht , in denen die für das Elektron-Photon-Feld geforderten Vertauschungsrelationen berücksichtigt werden konnten . Der Ausgangspunkt für diese Überlegungen war eine LOW-gleichung des betreffenden Prozesses , wobei sich nach Herausziehen der gleichzeitigen Kommutatoren , mit Hilfe der üblichen Reduktionstechnik , für die im Rest verbleibenden Matrixelemente wieder Ausdrücke vom Typ der hier betrachteten Prozesse ergaben , die in gleicher Weise sukzessive weiterbehandelt werden konnten. Auf die Besonderheiten , die sich hierbei durch das Auftreten von mehreren Elektronen bzw. Photonen in den Zwischenzuständen der LOWgleichung ergeben , wurde kurz eingegangen ; ferner wurde die Möglichkeit der Behandlung des Problems mit Hilfe von Dispersionsrelationen

diskutiert . Zur besseren Orientierung wurden die jeweils auftretenden Ausdrücke stets auch vom störungstheoretischen Standpunkt aus untersucht .

Die Erweiterung des Verfahrens für Prozesse bei denen auch reale Photonen bzw. mehr als zwei Elektronen beteiligt sind wurde am Beispiel der Negatron-Positron-Paarerzeugung durchgeführt .

Meinem verehrten Lehrer , Herrn Prof. Dr. G. LUDWIG bin ich für Anregung und Ermöglichung dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet . Für klärende Diskussionen und kritische Hinweise danke ich ferner den Herren Dr. D. DOEBNER , Dr. W. WEIDLICH , Dr. G. BERENDT und Dipl. -Phys. P. ROSENTHAL .

Literaturverzeichnis

1	DRELL , RUDERMAN :	Phys. Rev. 106 , 561 (1957)
2	DRELL , FUBINI :	Phys. Rev. 113 , 741 (1959)
3	KARZAS , WATSON , ZACHARIASEN :	Phys. Rev. 110 , 253 (1958)
4	BJORKEN , DRELL , FRAUTSCHI :	Phys. Rev. 112 , 1409 (1958)
5	BJORKEN , DRELL :	Phys. Rev. 114 , 1368 (1959)
6	LEHMANN SYMANZIK , Zimmermann :	Nuov. Cim. 1 , 205 (1955)
7	HAMILTON :	The Theory of Elementary Particles (Oxford 1959)
8	LOW :	Phys. Rev. 97 , 1392 (1955)
9	SCHWEBER :	An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory (Row Peterson a. Co. Evanstor, Ill. (1955)
10	BRENIG , HAAG :	Fortschritte der Physik 7 , 183 (1959)
11	DRELL , ZACHARIASEN :	Electromagnetic Structure of Nucleons (Oxford 1961)
12	SCHWINGER:	Phys. Rev. 75 , 898 (1949)
13	TSAI :	Phys. Rev. 122 , 1898 (1961)
14	ERICSSON :	Nuov. Cim. 19 , 1010 (1961)
15	STICHEL :	Über die Strahlungskorrekturen bei der Elektron-Proton-Streuung (Vortragsausarbeitung , Ruhestein-Tagung 1961)
16	DOEBNER :	Preprint (im Erscheinen)
17	HILGEVOORD :	Dispersion Relations and Causal Description (North-Holl. Publ. Comp. , Amsterdam 1960)
18	FRAZER , FULCO :	Phys. Rev. Lett. 2 , 365 (1959) Phys. Rev. 115 , 1763 (1959) Phys. Rev. 117 , 1609 (1960)
19	BERGIA , STANGHELLINI , FUBINI , VILLI :	Phys. Rev. Lett. 6 , 367 (1961)
20	FUBINI , NAMBU , WATAGHIN :	Phys. Rev. 111 , 329 (1958)
21	BLANCENBECLER , HUFF , GARTENHAUS , NAMBU :	Nuov. Cim. 17 , 775 (1960)

22	MÜLLER , NUNNEMANN , PENZLIN :	Eine dispersionstheoretische Methode zur Behandlung der Elektroerzeugung eines Pions am Nukleon . (Vortragsausarbeitung , Ruhestein-Tagung 1960)
23	CHEW , GOLDBERGER , LOW , NAMBU :	Phys. Rev. 106 , 1345 (1957)
24	MANDELSTAM :	Phys. Rev. 112, 1344 (1958)
25	GASIOROWICZ :	Fortschritte der Physik 8 , 665 (1960)
26	JAUCH , ROHRLICH :	The Theory of Photons and Electrons , (Addison-Wesley Publ. Comp. , Cambridge 1955)
27	GELL-MANN , GOLDBERGER , THIRRING :	Phys. Rev. 95 , 1612 (1954)
28	LÜDERS :	Der COMPTONeffekt am Nukleon (Vortragsausarbeitung , Oberwolfach (1959)

Lebenslauf

Am 14. April 1934 wurde ich als Sohn des Physikers Dr. phil. Josef S a n d h a s und seiner Ehefrau, der Physikerin Dr. phil. Ilse, geb. Wegscheider, in Berlin-Charlottenburg geboren.

Die Volksschule besuchte ich, von 1940 an, in Berlin, Graz, Kunzendorf (Niederlausitz) bis zum Sommer 1944. Bis zum Kriegsende war ich Schüler der Oberschule für Jungen in Asch (Sudetenland). Nach der Ausweisung aus der jetzigen Tschechoslowakei kam ich nach Erlangen und trat hier in die zweite Klasse des Gymnasium Fridericianum ein. Diese Schule besuchte ich bis zur Ablegung der Reifeprüfung im Sommer 1953.

Am 16. Oktober des gleichen Jahres wurde ich als Student der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät, mit dem Hauptfach Physik, an der Freien Universität Berlin immatrikuliert. Hier studierte ich bis zum Sommer-Semester 1960 und legte in dieser Zeit die Vorprüfung (1956) und die Diplomprüfung (1960) ab, die ich jeweils mit dem Urteil " sehr gut " bestand.

Seit Juli 1960 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin tätig. In letzter Zeit habe ich mich, neben der Betreuung von Seminaren, hauptsächlich Untersuchungen gewidmet, die zu der hier vorgelegten Dissertation führten.